GAODENGDAISHU

普通高等教育"十五"国家级规划教材

高等代数

（第二版）上册

丘维声

高等教育出版社

3

ISBN 7-04-011235-3

9 787040 112351 >

定价 15.40 元

高等代数

（第二版）

上　册

丘维声

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等代数．上册 / 丘维声．—2 版．—北京：高等教育出版社，2002.7
ISBN 7-04-011235-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．丘…　Ⅲ．高等代数—高等学校—教材　Ⅳ．015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 043550 号

高等代数(第二版)　上册
丘维声

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
		版　　次	1996 年 6 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2002 年 7 月第 2 版
印　　张	15.75	印　　次	2002 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	240 000	定　　价	15.40 元

第二版前言

《高等代数(上册、下册)》自 1996 年出版以来,一直作为北京大学数学科学学院高等代数课程的教材,同时也被不少综合大学数学系作为教材.作者自 1994 年以来,使用此教材(含它的前身讲义)连续给 1994 级至 2001 级共八届学生讲授高等代数课,深受广大学生的欢迎.北京大学教学评估室和学生教育评估委员会先后对作者讲授的高等代数课进行了 8 次评估,作为评估内容之一,每次都对此教材作了充分肯定.现在已经进入 21 世纪,作者根据时代的要求,结合这 8 年使用此教材的教学经验,对教材进行修订,使之更完善.

高等代数课程主要讲授线性代数,多项式理论,以及群、环、域的基本概念.尤以线性代数占的比重大.线性代数是研究线性空间和线性映射的理论,它的初等部分是研究线性方程组和矩阵理论.作者在本书的修订过程中,精选了内容,着重阐述最基本的和应用广泛的内容;对于不那么基本,或者应用不那么广泛的内容则略为提及,不展开讲;有的内容则不讲.对于每一节配备的习题也作了精心挑选.

随着时代的发展,计算机的普及,线性代数和多项式理论的重要性越来越被人们所认识.教好、学好高等代数课程,关键之一是编写出科学性强又深入浅出的教材.本书在如何让学生容易理解和掌握高等代数课程的内容上是下了很大功夫的,总是从学生熟悉的具体例子引出抽象的概念,从全书的内容体系直至每一节的内容如何简明易懂地讲授都作了精心推敲.全书先讲高等代数的具体对象:线性方程组、矩阵、数域 K 上 n 元有序数组的向量空间 K^n 和欧几里空间 $\mathbf{R}^n$、多项式,然后再讲抽象对象:线性空间和线性映射、欧几里得空间和酉空间、双线性函数和正交空间、辛空间(对于正交空间和辛空间只作简单介绍).本书强调讲道理,因为只有把道理讲清楚了,学生才能学好高等代数.同时我们认为讲道理不等于形式的逻辑证明.我们在为什么要引进每一个重要概念上讲清楚了道理,在为什么要学习这些基本内容上讲清楚了道理,在如何证明定理上也讲了道理.我们不仅强调要讲道理,而且力求把道理讲得简明易懂.

我们认为高等代数课程的教学目标,既要让学生掌握这门课程的基础知识和基本方法,又要培养他们具有数学的思维方式.只有按照数学的思维方式去学习数学,才能学好数学.而且学会数学的思维方式,有助于他们把今后肩负的工作做好,从而使他们终身受益.什么是数学的思维方式?观察客观世界

的现象，抓住其主要特征，抽象出概念或者建立模型；进行探索，通过直觉判断或者归纳推理、类比推理作出猜测；然后进行深入分析和逻辑推理，揭示事物的内在规律，从而使纷繁复杂的现象变得井然有序．这就是数学的思维方式．本书按照数学的思维方式编写每一节的内容，使学生在学习高等代数知识的同时，受到数学思维方式的熏陶，日积月累地培养学生具有数学的思维方式，提高学生的素质．

为了让学生了解高等代数在数学的其它分支以及实际问题中的应用，增强动手能力，本书在每一章的后面都配备了"应用与实验课题"，供学生自己阅读和动手解决．有的应用课题需要使用计算机的数学软件，否则手算太费时间．

本书的每一节都配备了经过精心挑选的适量习题，在书末附有习题解答与提示．

为了帮助学生学好高等代数课，我们还编写了《高等代数学习指导书(上册、下册)》．其内容包括基本理论的精华，如何在理论的指导下分析问题和解决问题，典型例题的解题思路和详细解答，拓宽知识面的阅读材料，经过挑选的丰富多采的习题以及习题的解答和提示．

本书(上册和下册)可作为综合大学、理工科大学和师范院校的数学系、应用数学系和概率统计系的高等代数课程的教材．上册供第一学期使用，下册供第二学期使用．每学期的周学时可为 4+2 或 4+1 或 4 (4+2是指每周讲课 4 学时，习题课 2 学时，4+1 的含意类似)．本书上册还可以作为综合大学、理工科大学等高等院校的线性代数课程的教材．

本书的第一版和这次修订先后获得 1996 年度和 2001 年度北京大学主干基础课高等代数课程建设项目的资助，特此向北京大学教务部(教务处)表示衷心感谢．在这次修订过程中，得到北京大学数学科学学院院长张继平教授的关心和支持，特此向他表示衷心感谢．作者还要向这几年来使用本教材的所有教师表示感谢．

作者衷心感谢本书的责任编辑胡乃冏编审，他为本书的编辑出版付出了辛勤劳动．

作者热诚欢迎广大读者对本教材提出宝贵意见．

丘维声

于北京大学数学科学学院

2001 年 12 月

目　　录

第 1 章　线性方程组

在实际问题或数学问题中，常常需要求一些未知的量，用字母 $x_1, x_2, \cdots$ 表示它们，根据问题中的等量关系，列出方程组．最基本、最常见的一类方程组是未知量 $x_1, x_2 \cdots$ 的一次方程组，我们称它们是**线性方程组**．为了统一地研究它们，我们建立线性方程组的模型，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

其中每个方程的左端是未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**一次齐次式**，右端是常数（称为**常数项**）．与未知量相乘的数称为**系数**，a_{ij} 是第 i 个方程中 x_j 的系数，$i = 1, 2, \cdots, s$；$j = 1, 2, \cdots, n$．方程组(1)中，方程的数目 s 与未知量的数目 n 可以相等，也可以不相等（$s < n$ 或 $s > n$ 都可能）．

对于 n 元线性方程组(1)，如果未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代入后，每个方程都变成恒等式，那么我们称 n 元有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是线性方程组(1)的**一个解**．方程组(1)的所有解组成的集合称为这个方程组的**解集**．

根据实际问题和数学问题的需要，我们要研究线性方程组的下列几个问题：

1．线性方程组是否一定有解？有解时，有多少个解？

2．如何求线性方程组的解？

3．线性方程组的解不止一个时，解集的结构如何？

4．线性方程组有解时，它的每一个解是否都符合实际问题的需要？（我们把符合实际问题的解称为**可行解**．）

这一章和第二、三章都将围绕这些问题展开讨论．

§1　高斯(Gauss)—约当(Jordan)算法

如何求线性方程组的解？我们来看一个具体例子．

例 1 求下述线性方程组的解：

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 3x_1+4x_2+2x_3-3x_4=6, \\ -x_1-5x_2+4x_3+x_4=11, \\ 2x_1+7x_2+x_3-6x_4=-5. \end{cases} \tag{1}$$

分析 如果我们能设法消去未知量 x_1,x_2,x_3，最后剩下一个含 x_4 的一次方程，那么就能求出 x_4 的值.从而得到只含 x_1,x_2,x_3 的线性方程组.类似地，可以相继求出未知量 x_3,x_2,x_1 所取的值.所谓消去未知量 x_1，就是使 x_1 的系数变成0.为了使线性方程组的求解方法能适用于含成百上千个未知量的方程组，便于用计算机编程序去计算，我们应当使解法有规律可循.今后我们用记号"②+①·(−3)"表示把方程组的第1个方程的(−3)倍加到第2个方程上；用记号"(②,④)"表示把方程组的第2、4个方程互换位置；用记号④·c 表示用非零数 c 乘第4个方程.

解

$$\begin{array}{r} \\ ②+①\cdot(-3) \\ ③+①\cdot 1 \\ ④+①\cdot(-2) \end{array}\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ -5x_2-x_3-9x_4=-6, \\ -2x_2+5x_3+3x_4=15, \\ x_2-x_3-10x_4=-13. \end{cases}$$

把第2,4个方程互换位置(目的是在下一步避免分数运算)：

$$(②,④)\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ x_2-x_3-10x_4=-13, \\ -2x_2+5x_3+3x_4=15, \\ -5x_2-x_3-9x_4=-6. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ ③+②\cdot 2 \\ ④+②\cdot 5 \end{array}\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ x_2-x_3-10x_4=-13, \\ 3x_3-17x_4=-11, \\ -6x_3-59x_4=-71. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ ④+③\cdot 2 \end{array}\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ x_2-x_3-10x_4=-13, \\ 3x_3-17x_4=-11, \\ -93x_4=-93. \end{cases} \tag{2}$$

方程组(2)的最后一个方程是 x_4 的一次方程，用 $-\frac{1}{93}$ 乘这个方程得，x_4

$=1$. 然后往回代入(2)的第 3,2,1 个方程,相继求得,$x_3=2$, $x_2=-1$, $x_1=3$. 于是$(3,-1,2,1)$是原方程组(1)的唯一的一个解.

像(2)这样形状的方程组称为**阶梯形方程组**.

从例 1 的求解过程看出,我们对线性方程组作了以下三种变换:

1° 把一个方程的倍数加到另一个方程上;

2° 互换两个方程的位置;

3° 用一个非零数乘某一个方程.

这三种变换称为**线性方程组的初等变换**.经过初等变换,把原方程组变成阶梯形方程组,然后去解阶梯形方程组(从最后一个方程开始,逐次往上解),求得的解就是原方程组的解.

不难看出,线性方程组经过 1° 型初等变换,得到的方程组的解集与原方程组的解集相等,此时称这两个方程组**同解**.同样容易看出,经过 2° 型(或 3° 型)初等变换得到方程组与原方程组同解.因此,经过一系列初等变换化成的阶梯形方程组与原线性方程组同解.这说明了例 1 中原线性方程组有唯一的一个解:$(3,-1,2,1)$.

例 1 的求解过程中,只是对线性方程组的系数和常数项进行了运算.因此,为了书写简便,对于一个线性方程组可以只写出它的系数和常数项,并且把它们按照原来的次序排成一张表,这张表称为线性方程组的**增广矩阵**.而只列出系数的表称为方程组的**系数矩阵**.例 1 中线性方程组(1)的增广矩阵和系数矩阵依次是:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & -5 & 4 & 1 & 11 \\ 2 & 7 & 1 & -6 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

线性方程组可以用由它的系数和常数项排成的一张表来表示.许多实际问题和数学研究对象都可以用一张表来表示.因此我们建立一个数学模型来统一地深入地研究这种表.

定义 1 由 $s\cdot m$ 个数排成 s 行、m 列的一张表称为一个 $s\times m$ **矩阵**,其中的每一个数称为这个矩阵的一个元素,第 i 行与第 j 列交叉位置的元素称为 (i,j) 元.

例如,线性方程组(1)的增广矩阵的(2,4)元是 -3.

矩阵通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 简单地表示.一个 $s\times m$ 矩阵可以简单地记作 $A_{s\times m}$,它的(i,j)元记作 $A(i;j)$.如果矩阵 A 的(i,j)元是 a_{ij},则可以把矩阵 A 记作(a_{ij}).

元素全为0的矩阵称为**零矩阵**,简记作0. s 行 m 列的零矩阵可以记成 $0_{s\times m}$.

如果一个矩阵 A 的行数与列数相等,则称它为**方阵**,m 行 m 列的方阵也称为 ***m* 级矩阵**.

本章和第二、三章围绕线性方程组来研究矩阵.第四、五、六章将深入地研究矩阵的运算和其他性质.

利用线性方程组的增广矩阵,我们可以把例1的求解过程按照下述格式来写.

例1　求线性方程组(1)的解.

解

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & -5 & 4 & 1 & 11 \\ 2 & 7 & 1 & -6 & -5 \end{pmatrix}
\xrightarrow[\text{④}+\text{①}\cdot(-2)]{\substack{\text{②}+\text{①}\cdot(-3)\\ \text{③}+\text{①}\cdot 1}}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -9 & -6 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{(\text{②},\text{④})}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & -5 & -1 & -9 & -6 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\substack{\text{③}+\text{②}\cdot 2\\ \text{④}+\text{②}\cdot 5}}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -17 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -59 & -71 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{④}+\text{③}\cdot 2}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -17 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -93 & -93 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{④}\cdot\left(-\frac{1}{93}\right)}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -17 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$\xrightarrow[\text{①}+\text{④}\cdot(-2)]{\substack{\text{③}+\text{④}\cdot 17\\ \text{②}+\text{④}\cdot 10}}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{③}\cdot\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{①}+\text{③}\cdot(-1)]{\text{②}+\text{③}\cdot 1}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{①}+\text{②}\cdot(-3)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \tag{4}$$

最后这个矩阵表示的线性方程组是:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2, \\ x_4 = 1. \end{cases} \tag{5}$$

从而得到原线性方程组(1)的解是(3, −1,2,1).

从上述求解过程看出,我们对线性方程组的增广矩阵作了以下三种变换:

1° 把一行的倍数加到另一行上;

2° 互换两行的位置;

3° 用一个非零数乘某一行.

这三种变换称为**矩阵的初等行变换**.

在例1的求解过程中,先把增广矩阵经过初等行变换化成了(3)式所示的矩阵,像这样的矩阵称为**阶梯形矩阵**.它的特点是:

(1) 元素全为0的行(称为**零行**)在下方(如果有零行的话);

(2) 元素不全为0的行(称为**非零行**),从左边数起第一个不为0的元素称为**主元**.各个非零行的主元的列指标随着行指标的递增而严格增大.

在例1的求解过程中,我们对阶梯形矩阵(3)继续作初等行变换,直至化

成(4)式所示的矩阵,像这样的矩阵称为**简化行阶梯形矩阵**.它的特点是:

(1) 它是阶梯形矩阵;

(2) 每个非零行的主元都是1;

(3) 每个主元所在列的其余元素都是0.

在解线性方程组时,把它的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵,写出相应的阶梯形方程组,进行求解;或者一直化成简化行阶梯形矩阵,写出它表示的线性方程组,从而可以立即得出解.

可以证明,任何一个矩阵都能经过一系列初等行变换化成阶梯形矩阵,并且能进一步用初等行变换化成简化行阶梯形矩阵.证明的思路从例1的增广矩阵化成简化行阶梯形矩阵的过程可以看出,然后用数学归纳法写出证明.

例2 解下述线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②\cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

写出最后这个阶梯形矩阵表示的线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_3 = -1, \\ 0 = -2. \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 无论取什么值都不能满足第3个方程:$0=-2$ 因此,原线性方程组无解.

例3 解下述线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&-1&3\\2&-2&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&-2&2\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{③+②\cdot 3}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②\cdot(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

最后这个简化行阶梯形矩阵表示的线性方程组是

$$\begin{cases}x_1-x_2=2,\\ \qquad x_3=-1,\\ \qquad 0=0.\end{cases}$$

从第1个方程看出,对于 x_2 每取一个值 c_2,可以求得 $x_1=c_2+2$,从而得到原方程组的一个解:$(c_2+2, c_2, -1)$. 由于 c_2 可以取任意一个数,因此原方程组有无穷多个解. 我们可以用下述表达式来表示这无穷多个解:

$$\begin{cases}x_1=x_2+2,\\ x_3=-1.\end{cases}$$

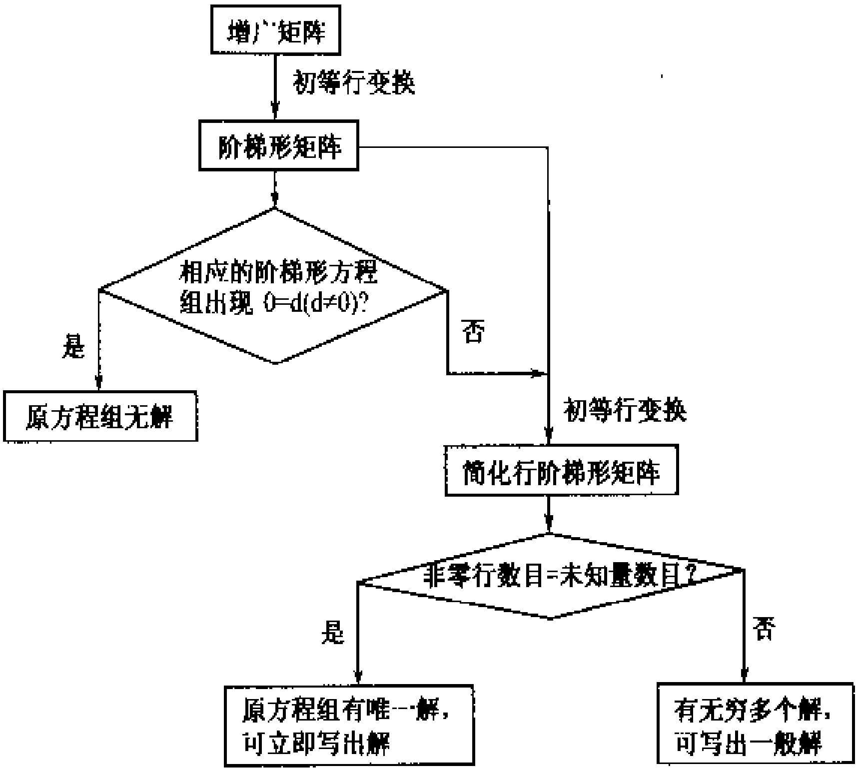
这个表达式称为原线性方程组的**一般解**,其中以主元为系数的未知量 x_1, x_3 称为**主变量**,而其余未知量 x_2 称为**自由未知量**. 一般解就是用含自由未知量的式子来表示主变量.

从例2看到,把线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵,如果相应的阶梯形方程组出现"$0=d$(其中 d 是非零数)"这样的方程,则原方程组无解. 从例1和例3,我们猜想:如果相应的阶梯形方程组不出现"$0=d$(其中 $d\neq 0$)"这种方程,则原方程组有解. 下一节将证明这个猜想是正确的.

例1的阶梯形矩阵的非零行数目为4,与未知量数目4相等. 例3的阶梯形矩阵的非零行数目为2,小于未知量的数目3. 由此猜想:在线性方程组有解的情况下,它的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵中,如果非零行的数目等于方程组的未知量数目,则原方程组有唯一解;如果非零行的数目小于未知量的数目,则原方程组有无穷多个解.

线性方程组有解时,把阶梯形矩阵经过初等行变换进一步化成简化行阶梯形矩阵,则可以立即写出原方程组的唯一解或者无穷多个解.

现在我们把解线性方程组的方法总结如下：



上述解线性方程组的方法称为**高斯(Gauss)—约当(Jordan)算法**.

习 题 1.1

1. 解下列线性方程组：

$$(1)\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = -9, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = -7; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = -8, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 2; \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -8, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4, \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - 12x_3 = -15; \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -11, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

2. 一个投资者想把 1 万元投入给 3 个企业 A_1, A_2, A_3，所得的利润率分别是 12%，15%，22%．他想得到 2000 元的利润．

(1) 如果投入给 A_2 的钱是投给 A_1 的 2 倍，那么应当分别给 A_1, A_2, A_3 投资多少？

(2) 可不可以投给 A_3 的钱等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和？

3. 解线性方程组：

$$(1)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 11; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + 12x_2 + 7x_3 = -5, \\ x_1 + 16x_2 + 13x_3 = -1; \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 + 16x_2 + 13x_3 = 1. \end{cases}$$

§2 线性方程组的解的情况及其判别准则

上一节的例 1、例 2、例 3 的线性方程组分别有唯一解、无解、有无穷多个解．例 2 的阶梯形方程组出现 $0 = -2$ 这个方程，从而无解．例 1 和例 3 的阶梯形方程组没有出现“$0 = d$（其中 d 是非零数）”这种方程，它们分别有唯一解和无穷多个解．这启发我们猜想线性方程组的解只有三种可能：无解，有唯一解，有无穷多个解，而且猜想阶梯形方程组是否出现“$0 = d$（其中 $d \neq 0$）”这

种方程，是线性方程组无解还是有解的判别准则.

上一节的例1和例3的线性方程组都有解，但前者有唯一解，后者有无穷多个解.从它们的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵的不同之处，我们猜想：在有解的情况下，当阶梯形矩阵的非零行数目等于未知量数目时，有唯一解；非零行数目小于未知量数目时，有无穷多个解.

下面我们来证明上述猜想是正确的.

由于线性方程组与对它进行初等变换得到的阶梯形方程组同解，因此我们只要讨论阶梯形方程组的解有几种可能及其判别准则.设阶梯形方程组有 n 个未知量.

情形1　阶梯形方程组中出现"$0=d$(其中 $d\neq 0$)"这种方程.由于这种方程无解，从而阶梯形方程组无解.

情形2　阶梯形方程组中不出现"$0=d$(其中 $d\neq 0$)"这种方程，我们设阶梯形方程组的增广矩阵中，非零行的数目为 r，则主元数目为 r.

情形2.1　$r=n$.此时 n 个未知量都是主变量.由于 n 个主元应分布在不同的列，因此阶梯形方程组一定是下述形式：

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $c_{11}, c_{22}, \cdots, c_{nn}$ 都不为零.对于(1)的增广矩阵施行初等行变换化成的简化行阶梯形矩阵一定形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_1' \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_2' \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n' \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

从而阶梯形方程组有唯一解：$(d_1', d_2', \cdots, d_n')$.

情形2.2　$r<n$.此时阶梯形方程组形如

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\
\qquad\qquad c_{2j_2}x_{j_2} + \cdots \quad \cdots \quad \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\
\qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad c_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0,
\end{cases}
\tag{3}
$$

其中 $c_{11}, c_{2j_2}, \cdots, c_{rj_r}$ 都不为 0. 这时 $x_1, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ 是主变量,其余 $n-r$ 个未知量是自由未知量. 方程组(3) 中,至少有一个自由未知量的系数不全为 0,否则这个未知量在方程组中没有出现,可以去掉. 给 $n-r$ 个自由未知量一组值,则方程组(3) 的第 r 个方程变成 x_{j_r} 的一次方程,可解出 x_{j_r};将 x_{j_r} 的值代入前 $r-1$ 个方程中,从第 $r-1$ 个方程可解出 $x_{j_{r-1}}$;依次往上代入,可解出 $x_{j_{r-2}}, \cdots, x_{j_2}, x_1$. 从而得到方程组的一个解. 由于这 $n-r$ 个自由未知量可以取无穷多组值,因此方程组(3) 有无穷多个解. 这无穷多个解可以用一般解表示:

$$
\begin{cases}
x_1 = c'_{1k}x_k + \cdots + c'_{1l}x_l + d'_1, \\
x_{j_2} = c'_{2k}x_k + \cdots + c'_{2l}x_l + d'_2, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
x_{j_r} = c'_{rk}x_k + \cdots + c'_{rl}x_l + d'_r,
\end{cases}
\tag{4}
$$

其中 $x_k, \cdots, x_l$ 是自由未知量.

情形 2.3 $r > n$. n 元阶梯形方程组的增广矩阵共有 $n+1$ 列,由于 r 个主元应当分布在不同的列,因此 $r \leqslant n+1$. 于是 $r = n+1$. 这时有 $n+1$ 个主元,分别位于第 $1, 2, \cdots, n+1$ 列;于是第 $n+1$ 行的主元 c_{n+1} 位于第 $n+1$ 列. 从而第 $n+1$ 个方程为 $0 = c_{n+1}$,这与情形 2 的已知条件矛盾. 因此 $r > n$ 是不可能的.

综上述,我们得到下面的结论:

定理 1 n 元线性方程组的解的情况只有三种可能:无解,有唯一解,有无穷多个解. 把 n 元线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵,如果相应的阶梯形方程组出现"$0 = d$(其中 d 是非零数)"这样的方程,则原方程组无解;否则,有解. 当有解时,如果阶梯形矩阵的非零行数目 r 等于未知量数目 n,则原方程组有唯一解;如果非零行数目 $r < n$,则原方程组有无穷多个解. ▮

如果一个线性方程组有解，则称它是**相容的**；否则，称为是**不相容的**.

例1　a 为何值时，下述线性方程组有解？当有解时，求出它的所有解.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 3x_4 = a + 1, \\ -x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -4. \end{cases} \tag{5}$$

解

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 & a+1 \\ -1 & -11 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(①,②)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & -3 & a+1 \\ -1 & -11 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -7 & -5 & 5 \\ 0 & 16 & -7 & -5 & a+3 \\ 0 & -16 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -7 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

原线性方程组有解当且仅当 $a - 2 = 0$，即 $a = 2$. 此时再施行初等行变换化成简化行阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -7 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{9}{16}\\ 0 & 1 & -\frac{7}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{5}{16}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因此原方程组的一般解是

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{16}x_3 + \frac{9}{16}x_4 + \frac{9}{16}, \\ x_2 = \frac{7}{16}x_3 + \frac{5}{16}x_4 + \frac{5}{16}, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 是自由未知量.

下述线性方程组有什么特点?它是否一定有解?

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

线性方程组(6)的每个方程的常数项都为 0. 常数项全为 0 的线性方程组称为**齐次线性方程组**. 显然,(0,0,0,0) 是齐次线性方程组(6)的一个解,这个解称为**零解**. 任何一个齐次线性方程组都有零解. 如果一个齐次线性方程组除了零解外,还有其他的解,则称其他的解为**非零解**. 根据定理 1 的前半部分得出,如果一个齐次线性方程组有非零解,那么它就有无穷多个解.

如何判断一个齐次线性方程组有没有非零解?运用定理 1 便得出

推论 2 n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是:它的系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵中,非零行的数目 $r < n$. ▌

从推论 2 又可得到

推论 3 n 元齐次线性方程组如果方程的数目 $s < n$,那么它一定有非零解.

证明 把齐次线性方程组的系数矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵,它的非零行的数目 $r \leqslant s < n$,因此齐次线性方程组有非零解. ▌

例 2 判断齐次线性方程组(6)有无非零解,如果有非零解,求出它的一般解.

解 齐次线性方程组的增广矩阵的最后一列元素全为 0,在对它作初等行变换时,所得到的矩阵的最后一列元素也总是全为 0. 因此我们只要对系数矩阵进行初等行变换化成阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & -7 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -10 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

阶梯形矩阵的非零行数目为3，它小于未知量数目4，因此原齐次线性方程组有非零解．由于经过初等行变换有

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -10 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此原齐次线性方程组的一般解是

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{10}x_4, \\ x_2 = -\frac{7}{10}x_4, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

其中 x_4 是自由未知量．

习 题 1.2

1. a 为何值时，下述线性方程组有解？当有解时，求出它的所有解．

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a. \end{cases}$$

2. a 为何值时，下述线性方程组有唯一解？a 为何值时，此方程组无解？

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

3. (1) 下述线性方程组有无解？有多少个解？

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 3y = -1, \\ 10x - 4y = 3; \end{cases}$$

(2) 改变第(1)小题的方程组的一个方程的某一个系数，使得新的方程组没有解；

(3) 在平面直角坐标系 Oxy 里，画出第(1)小题中各个方程表示的图形.

4. a 为何值时，下述线性方程组有解？当有解时，求它的所有解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2a+2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2a. \end{cases}$$

5. 当 c 与 d 取什么值时，下述线性方程组有解？当有解时，求它的所有解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = c, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = d. \end{cases}$$

6. 是否存在 2 次多项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 其图象经过下述 4 个点：

$$P(1,2), Q(-1,3), M(-4,5), N(0,2).$$

7. 下列齐次线性方程组有无非零解？若有非零解，求出它的一般解.

(1) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

*8. 一个投资者想把 1 万元投入给 3 个企业 A_1、A_2、A_3，所得的利润率分别是 12%，15%，22%．如果他投入给 A_3 的钱等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和，求总利润 l(千元)的最大值和最小值，此时分别投给 A_1, A_2, A_3 各多少千元？

§3 数 域

下述线性方程组在有理数集范围内有解吗？在整数集范围内呢？

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \tag{1}$$

在有理数集范围内解线性方程组(1)：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{①\cdot\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{pmatrix}$$

于是方程组的解为$(\frac{1}{2},1)$.

如果在整数集范围内解方程组(1),那么上述求解过程中最后一步是行不通的(因为$\frac{1}{2}$不是整数,所以不能用$\frac{1}{2}$乘第1个方程.或者说,由于整数集对除法不封闭,即任意两个整数的商有可能不是整数,因此不能用2去除第1个方程).这样在整数集范围内,方程组(1)没有解.

从上述例子看出,由于矩阵的3°型初等行变换需要用一个非零数乘某一个方程,以便使阶梯形矩阵的主元变成1,因此为了使初等行变换能畅通无阻地施行,就应当要求所考虑的数集对于加法、减法、乘法、除法(除数不为0)都封闭.即该数集内任意两个数的和、差、积、商(除数不为0)仍属于这个数集.我们在前面两节讨论线性方程组的解法和解的情况的判定时,已经假定了所取的数集具有这个性质.现在我们把它明确地说出来.

定义1 设K是复数集的一个子集,如果K满足:

(1) $0、1\in K$;

(2) 对于任意的$a、b\in K$,都有$a\pm b、ab\in K$;并且当$b\neq 0$时,有$\frac{a}{b}\in K$,

那么称K是一个**数域**.

数域K满足的第(2)个条件可以说成:K对于加、减、乘、除4种运算封闭.

显然,有理数集$\mathbf{Q}$,实数集$\mathbf{R}$,复数集$\mathbf{C}$都是数域,分别称$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$是有理数域,实数域,复数域.但是整数集$\mathbf{Z}$不是数域.

除了$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$外,还有很多数域.例如,令

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a、b\in\mathbf{Q}\},$$

显然,$0=0+0\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,$1=1+0\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,并且容易验证$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$对于加、减、乘、除4种运算封闭,因此,$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$是一个数域.

上面列举的数域$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,哪个最小?(即,哪个数域是所有数域的子集?)

命题1 任一数域都包含有理数域.

证明 设K是一个数域,则$0、1\in K$,从而

$$2=1+1\in K,3=2+1\in K,\cdots,n=(n-1)+1\in K.$$

即,任一正整数$n\in K$.又由于

$$-n=0-n\in K,$$

因此任一负整数 $-n \in K$. 从而 $\mathbf{Z} \subseteq K$. 于是任一分数

$$\frac{a}{b} \in K \quad (\text{其中 } b \neq 0)$$

因此,$\mathbf{Q} \subseteq K$. ∎

从现在起,我们取定一个数域 K,所讨论的线性方程组都是数域 K 上的,即它的全部系数和常数项都属于 K,并且在数域 K 里求它的解,从而它的每一个解都是数域 K 里的数组成的有序数组. 所讨论的矩阵,它的全部元素都属于 K,称它为数域 K 上的矩阵. 做矩阵的初等行变换时,"倍数"、"非零数"都属于 K.

习 题 1.3

1. 令 $\mathbf{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$,证明 $\mathbf{Q}(i)$ 是一个数域.
2. 最大的数域是哪一个?(即,哪一个数域包含了所有的数域?)

应用与实验课题:配制食品模型

某食品厂收到了 2 000 kg 食品的订单,要求这种食品含脂肪 5%,碳水化合物 12%,蛋白质 15%. 该厂准备用 5 种原料配制这种食品,其中每一种原料含脂肪,碳水化合物,蛋白质的百分比和每 kg 的成本(元) 如下表所示.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
脂肪	8	6	3	2	4
碳水化合物	5	25	10	15	5
蛋白质	15	5	20	10	10
每 kg 的成本	4.4	2	2.4	2.8	3.2

1. 用上述 5 种原料能不能配制出 2 000 kg 的这种食品?如果能够,那么解是唯一的吗?写出它的所有解.

2. 对于第 1 小题,写出所花费的成本的表达式,并且求每种原料用多少量时成本最低(有的原料可以不用).

(3) 用 A_1, A_2, A_3, A_4 这 4 种原料能配制 2 000 kg 这种食品吗?如果能够,它的解是唯一的吗?求出这时所花费的成本.

4. 用 A_2, A_3, A_4, A_5 这 4 种原料能配制 2 000 kg 这种食品吗?

5. 用 A_3, A_4, A_5 这 3 种原料呢?

第2章　行　列　式

第一章 §2 定理 1 给出了线性方程组有没有解，有多少解的判别准则，它需要首先把方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵. 能不能直接用原来的线性方程组的系数和常数项判断它有没有解，有多少解呢？

先研究两个方程的二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 a_{11}, a_{21} 不全为 0，不妨设 $a_{11} \neq 0$. 将它的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\cdot\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & b_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \end{pmatrix}.$$

情形 1　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. 此时原方程组有唯一解：

$$\left(\frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right). \tag{2}$$

情形 2　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. 此时原方程组无解或者有无穷多个解.

综上所述得出

命题 1　两个方程的二元一次方程组(1) 有唯一解的充分必要条件是：$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. 此时，唯一解如(2) 式所示. ▌

为了便于记忆表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，我们把它记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

于是表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 就是(3) 中主对角线(从左上至右下的对角线) 上两个元素的乘积减去反对角线(从右上至左下的对角线) 上两个元素的乘积.

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为 **2 阶行列式**，它可以用记号(3) 来简洁地表示. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

则 2 阶行列式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 也可称为 **2 级矩阵 A 的行列式**，简洁地记作 $|A|$

或者 $\det A$.

利用 2 阶行列式的概念,(2) 中的两个分数的分子可以分别简洁地记成

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

有了 2 阶行列式的概念,我们可以把命题 1 叙述成:

命题 1′　两个方程的二元一次方程组(1) 有唯一解的充分必要条件是:它的系数行列式(即系数矩阵 A 的行列式) $|A| \neq 0$,此时它的唯一解是

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \right). \tag{6}$$

公式(6) 中的第一个分数的分子是将系数行列式的第 1 列换成方程组的常数项得到的 2 阶行列式,而第二个分数的分子是将系数行列式的第 2 列换成常数项得到的 2 阶行列式. ∎

命题 1′ 告诉我们,两个方程的二元一次方程组有没有唯一解可以用它的系数行列式来判别;有唯一解时,解可以用系数行列式以及用常数项替换其相应的列得到的行列式来表示.

对于 n 个方程的 n 元线性方程组有没有类似的结论?这需要有 n 阶行列式概念.这一章我们就来介绍 n 阶行列式的概念和性质,并且回答上述问题.

§1　n 元排列

2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1}$$

表达式的第 1 项前而带正号,第 2 项前面带负号,这是由什么决定的?第 1 项中两个数乘积 $a_{11}a_{22}$,其行指标依次是 1、2,列指标依次是 1、2;而第 2 项中 $a_{12}a_{21}$ 的行指标依次是 1、2,列指标却依次是 2、1.由此看出,当每一项的两个数按照行指标由小到大排好后,它的列指标形成的排列决定了该项前面所带的符号.这启发我们,为了得到 n 阶行列式的概念,需要首先讨论 n 个自然数组成的全排列的性质.

定义 1　n 个不同的自然数的一个全排列称为一个 **n 元排列**.

例如,自然数 1,2,3 形成的 3 元排列有

123,132,213,231,312,321.

给定 n 个不同的自然数,它们形成的全排列有 $n!$ 个.因此对于给定的 n 个不同的自然数,n 元排列的总数是 $n!$.

我们在大多数情形下,考虑的是自然数 $1,2,\cdots,n$ 形成的 n 元排列,在某些情形下也需要考虑某 n 个不同的自然数形成的 n 元排列.下面讨论的 n 元排列的性质,如果没有特别声明,考虑的是 $1,2,\cdots,n$ 形成的 n 元排列,但对任意 n 个不同的自然数形成的 n 元排列也成立.

4 元排列 2341 中,2 与 3 形成的数对 23,小的数在前,大的数在后,此时称这一对数构成一个**顺序**;而 2 与 1 形成的数对 21,大的数在前,小的数在后,此时称这一对数构成一个**逆序**.排列 2341 中,构成逆序的数对有 21,31,41,共 3 对,此时我们称排列 2341 的**逆序数**是 3,记作 $\tau(2341)=3$.

上述顺序,逆序,逆序数的概念也适用于任一 n 元排列.

4 元排列 2143 中,构成逆序的数对有 21,43,共 2 对.于是 $\tau(2143)=2$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

上述例子中,2341 是奇排列,2143 是偶排列.

把排列 2341 的 3 和 1 互换位置,其余数不动,便得到排列 2143.像这样的变换称为一个**对换**,记作(3,1).对换的概念也适用于 n 元排列.

奇排列 2341 经过对换(3,1)变成的排列 2143 是偶排列.由此猜想有下述结论:

定理 1 对换改变 n 元排列的奇偶性.

证明 先看对换的两个数在 n 元排列中相邻的情形:

$$\cdots\cdots i \quad j\cdots\cdots \tag{Ⅰ}$$

$$\big\downarrow (i,j)$$

$$\cdots\cdots j \quad i\cdots\cdots \tag{Ⅱ}$$

i 和 j 以外的数构成的数对是顺序还是逆序,在(Ⅰ)与(Ⅱ)中是一样的;i 和 j 以外的数与 i(或 j)构成的数对是顺序还是逆序,在(Ⅰ)与(Ⅱ)中也是一样的.只有数对 ij,如果它在(Ⅰ)中是顺序,那么它在(Ⅱ)中是逆序;如果它在(Ⅰ)中是逆序,那么它在(Ⅱ)中是顺序.前一情形,(Ⅱ)比(Ⅰ)多一个逆序;后一情形,(Ⅱ)比(Ⅰ)少一个逆序.因此(Ⅰ)与(Ⅱ)的奇偶性相反.

再看一般情形:

$$\cdots\cdots i \quad k_1\cdots k_s \quad j\cdots\cdots \tag{Ⅲ}$$

$$\Big\downarrow (i,j)$$

$$\cdots\cdots j \quad k_1\cdots k_s \quad i\cdots\cdots \tag{Ⅳ}$$

从(Ⅲ)变成(Ⅳ)可以经过下列相邻两数的对换来实现：

$$(i,k_1),\cdots,(i,k_s),(i,j),(k_s,j),\cdots,(k_1,j)$$

这一共作了 $s+1+s=2s+1$ 次相邻两数的对换.由于奇数次相邻两数的对换会改变排列的奇偶性,因此(Ⅲ)与(Ⅳ)的奇偶性相反. ▌

有时需要把一个 n 元排列经过若干次对换变成自然序排列 $123\cdots n$.这是否总能办到?先看一个5元排列的例子：

$$34521 \xrightarrow{(5,1)} 34125 \xrightarrow{(4,2)} 32145$$

$$\xrightarrow{(3,1)} 12345.$$

上述过程的第一步是作一个对换,把5换到最后位置,第二步作一个对换,把4放到倒数第二个位置,依次类推.显然这一方法对于任何一个 n 元排列也适用.这就肯定地回答了上述问题.

进一步我们看到把排列34521变成12345共作了3次对换,而 $\tau(34521)=7$.这表明在这个例子中,所作对换的次数与原来的排列有相同的奇偶性.这个结论对于任意 n 元排列也成立,理由如下：

设 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 s 次对换变成 $123\cdots n$.显然 $123\cdots n$ 是偶排列.因此如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列,则 s 必为奇数,才能把奇排列变成偶排列;如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列,则 s 必为偶数,才能保持排列的奇偶性不变.

显然,如果 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 s 次对换变成自然序排列 $123\cdots n$,那么 $123\cdots n$ 经过上述 s 次对换(次序相反)就变成排列 $j_1j_2\cdots j_n$.

综上述得

定理2　任一 n 元排列与排列 $123\cdots n$ 可以经过一系列对换互变,并且所作对换的次数与这个 n 元排列有相同的奇偶性.

习　题　2.1

1. 求下列各个排列的逆序数,并且指出它们的奇偶性：

(1) 315462;　　(2) 365412;　　(3) 654321;

(4) 7654321； (5) 87654321； (6) 987654321；

(7) 123456789； (8) 518394267； (9) 518694237.

2. 求下列 n 元排列的逆序数：

(1) $(n-1)(n-2)\cdots 21n$； (2) $23\cdots(n-1)n1$.

3. 写出把排列 315462 变成排列 123456 的那些对换.

4. 求 n 元排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数，并且讨论它的奇偶性.

5. 如果 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 的逆序数为 r，求 n 元排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数.

6. 在 $1,2,\cdots,n$ 的 n 元排列中，

(1) 位于第 k 个位置的数 1 作成多少个逆序？

(2) 位于第 k 个位置的数 n 作成多少个逆序？

7. 计算下列 2 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$.

8. 利用 2 阶行列式，判断下述二元一次方程组是否有唯一解，并且有唯一解时，求出这个解.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$$

§2 n 阶行列式的定义

2 阶行列式是一个表达式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

如何定义 3 阶行列式？它应该是什么样的表达式？

从(1) 式看到，2 阶行列式的每一项是位于不同行、不同列的两个元素的乘积；第 1 项 $a_{11}a_{22}$ 前面带正号，此时这两个元素按行指标成自然序排好，其列指标所成排列是偶排列；第 2 项 $-a_{12}a_{21}$ 带负号，其行指标成自然序排列，列指标的排列 21 是奇排列. 由于 2 元排列共有 2! 个，因此 2 阶行列式共有 2! 项，即 2 项.

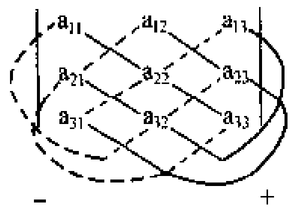
从 2 阶行列式的上述特点受到启发，我们定义 3 阶行列式是如下的表达式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{2}$$

即 3 阶行列式是 3! 项的代数和，其中每一项都是位于不同行、不同列的 3 个元素的乘积，把每一项的 3 个元素按行指标成自然序排好位置，当列指标形成的

排列是偶排列时，该项带正号；奇排列时，该项带负号(注意：123，231，312 都是偶排列；而 321，213，132 都是奇排列).

3 阶行列式的 6 项及其所带符号可以采用下图来记忆：



3 阶行列式的每一项的 3 个元素的乘积都是形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是一个 3 元排列.这一项前面所带的符号由排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性决定;奇排列时,带负号;偶排列时,带正号.于是可以用

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$$

来确定该项前面所带的符号.从而 3 阶行列式的每一项都是形如

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{3}$$

由于 $j_1j_2j_3$ 可以取遍 3!个 3 元排列,因此 3 阶行列式是形如(3) 的 3!项的和.我们用 $\sum$ 表示求和,称 $\sum$ 是连加号.于是 3 阶行列式的定义可以简洁地写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{4}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对于所有 3 元排列求和.

类似地,我们可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 1　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 n!项的代数和,其中每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积,把这 n 个元素按照行指标成自然序排好位置,当列指标所成排列是偶排列时,该项带正号;奇排列时,该项带负号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{def}} \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{5}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 元排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和.(5)式称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

则 n 阶行列式(5)也称为 n 级矩阵 A 的行列式,简记作 $|A|$ 或者 $\det A$.

注意:n 级矩阵 A 是指形如(6)的一张表,而 n 阶行列式 $|A|$ 是指形如(5)的一个表达式,不要混淆它们.

按照定义 1,1 阶行列式 $|a| = a$.

如何运用行列式的定义计算下述 4 阶行列式的值?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \tag{7}$$

上述4阶行列式的主对角线下方的元素全为0,像这样的行列式称为**上三角形行列式**.

按照行列式的定义,行列式(7)的每一项是取自不同行、不同列的 4 个元素的乘积.由于第4行有3个0,因此第4行只有取 a_{44} 才有可能使乘积项不为0,此时第 3 行只有取 a_{33} 才有可能使乘积项不为0(注意第 4 行已经取了第 4 列的元素 a_{44},因此第 3 行不能取第 4 列元素 a_{34}).类似地,第 2 行只能取 a_{22},第 1 行只能取 a_{11} 才有可能使乘积项不为 0,这一项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 前面带正号.因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}. \tag{8}$$

类似的方法可以得出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \tag{9}$$

即 n 阶上三角形行列式的值等于它的主对角线上 n 个元素的乘积.

在 n 阶行列式的定义中,我们把每一项的 n 个元素的乘积按照行指标成自然序排好位置,但是数的乘法有交换律,因此我们可以按任一次序排它们的位置,这时该项所带的符号怎么表达呢?用 3 阶行列式作为例子进行探索.我们猜想:n 阶行列式的每一项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{10}$$

也可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}. \tag{11}$$

理由如下:

设 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 经过 s 次互换两个元素的位置变成 $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$,则行指标排列 $12\cdots n$ 经过相应的 s 次对换变成 $i_1i_2\cdots i_n$;列指标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过相应的 s 次对换变成 $k_1k_2\cdots k_n$.于是根据 §1 的定理 2 和定理 1 得

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} = (-1)^s,$$

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^s = (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

从而

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)} &= (-1)^s\cdot(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^s \\ &= (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\end{aligned}$$

因此,项(10)与项(11)相等.

根据以上的议论得出,给定行指标的一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$,n 级矩阵 A 的行列式 $|A|$ 为

$$|A| = \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}; \tag{12}$$

或者给定列指标的一个排列 $k_1k_2\cdots k_n$,n 阶行列式 $|A|$ 为

$$|A| = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}. \tag{13}$$

特别地,n 阶行列式 $|A|$ 的每一项可以按列指标成自然序排好位置,这时用行指标所成排列的奇偶性来决定该项前面所带的符号,即

$$|A| = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{14}$$

(14) 式与(5) 式表明,行列式中行与列的地位是对称的.

习 题 2.2

1. 按定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列 3 阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

3. 用行列式定义计算:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. n 阶行列式的反对角线上 n 个元素的乘积一定带负号吗?

5. 写出下述行列式中 x^4 的项与 x^3 的项:

$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

*6. 设 $n \geqslant 2$,证明:如果 n 级矩阵 A 的元素为 1 或 -1,则 $|A|$ 必为偶数.

§3 行列式的性质

从行列式的定义知道,n 阶行列式是 $n!$项的代数和,其中每一项是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积.当 n 增大时,$n!$极其迅速地增大.例如

$$5! = 120, \quad 10! = 3\ 628\ 800.$$

如果直接用行列式的定义计算一个 n 阶行列式,其计算量是相当大的.因此我们必须研究行列式的性质,利用行列式的性质来简化行列式的计算,并且利用行列式的性质来研究线性方程组有唯一解的条件.

行列式有哪些性质呢?先看 2 阶行列式有哪些性质.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

因此看出,2 阶行列式的行与列互换(即,第 1 行变成第 1 列,第 2 行变成第 2 列,得到一个新的行列式),其行列式的值不变.n 阶行列式也有此性质:

性质 1 行列互换,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

证明 把(1)式右边的行列式按照本章 §2 的公式(14)展开(注意第 1 个下标是列指标,第 2 个下标是行指标).

$$右边 = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

把(1)式左边的行列式按照定义展开(注意第 1 个下标是行指标):

$$左边 = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

因此(1)式成立. ▌

性质 1 进一步表明了行列式的行与列的地位是对称的.因此,行列式有关行

的性质，对于列也同样成立．今后我们只研究行列式有关行的性质，读者可以把它们"翻译"成有关列的性质．

对于2阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ kb_1 & kb_2 \end{vmatrix} = a_1(kb_2) - a_2(kb_1) = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式也有此性质：

性质 2 行列式一行的公因子可以提出去．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

证明

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

▌

在性质2中，当 $k=0$ 时，得出：如果行列式中有一行为零(即，有一行的元素全为0)，则行列式的值为0．

对于2阶行列式，有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 \end{vmatrix} &= a_1(b_2+c_2) - a_2(b_1+c_1) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1c_2 - a_2c_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

n 阶行列式也有此性质：

性质 3 行列式中若有某一行是两组数的和，则此行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的这一行分别是第一组数和第二组数，而其余各行与原来行列式的相应各行相同．即

$$\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 第\ i\ 行 \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

证明

$$\begin{aligned} 左边 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{j_i} + c_{j_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{j_i} \cdots a_{nj_n} \\ &\quad + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{j_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= 右边. \end{aligned}$$ ▌

对于 2 阶行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

因此

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式也有此性质:

性质 4 两行互换,行列式反号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 第\ i\ 行 \\ \\ 第\ k\ 行 \\ \\ \\ \end{array} \tag{4}$$

证明 注意(4)式右边的行列式的第 i 行元素的第1个下标是 k，而第 k 行元素的第1个下标是 i，据行列式的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\text{右边} &= -\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n}\\
&= -\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n}(-1)\cdot(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}\\
&= \sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}\\
&= \text{左边}.
\end{aligned}$$

∎

性质5 两行相同，行列式的值为0.即

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

证明 把(5)式左边的行列式的第 i 行与第 k 行互换，据性质4得

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix},$$

从而(5)式左边行列式的2倍等于0，因此(5)式左边行列式的值为0. ∎

性质6 两行成比例，行列式的值为0.即

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & & & \vdots\\
la_{i1} & la_{i2} & \cdots & la_{in}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

证明 把(6)式左边行列式的第 k 行的公因子 l 提出去，所得行列式有两

行相同,从而它的值为 0. ▌

性质 7 把一行的倍数加到另一行上,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1}+la_{i1} & a_{k2}+la_{i2} & \cdots & a_{kn}+la_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & k_{k2} & \cdots & k_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

证明

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ la_{i1} & la_{i2} & \cdots & la_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{右边}.$$ ▌

评注

[1] 设 n 级矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

把 A 的行与列互换得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

称为 A 的**转置**,记作 A'(或 A^{T},或 A^{t}).

由上述定义,立即得出

$$A'(i;j) = A(j;i), \tag{9}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$.

据行列式的性质 1 得

$$|A'| = |A|. \tag{10}$$

[2] 设 A 是 n 级矩阵.根据行列式的性质 7,得

$$\text{如果 } A \xrightarrow{ⓚ+ⓘ\cdot l} B,\text{则} |B| = |A|. \tag{11}$$

根据行列式的性质 4,得

$$\text{如果 } A \xrightarrow{(ⓘ,ⓚ)} B,\text{则} |B| = -|A|. \tag{12}$$

根据行列式的性质 2,得

$$\text{如果 } A \xrightarrow{ⓘ\cdot c} B,\text{则} |B| = c|A|, \tag{13}$$

其中 $c \neq 0$.

从(11)、(12)、(13) 得

$$\text{如果 } A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B,\text{则} |B| = l|A|, \tag{14}$$

其中 l 是某个非零数.

[3] 行列式的性质2至性质7是对于行来叙述的,根据行列式的性质1,容易推出它们对于列也成立.例如,行列式一列的公因子可以提出去;两列互换,行列式反号;把一列的倍数加到另一列上,行列式的值不变;等等.

[4] 利用行列式的性质 7、性质 4、性质 2,可以把一个行列式化成上三角形行列式的非零数倍.而上三角形行列式的值就等于它的主对角线上所有元素的乘积,这很容易计算.因此把行列式化成上三角形行列式,是计算行列式的基本方法之一.

[5] 行列式的性质 3 在计算行列式中也起着重要作用.

例 1 计算下述行列式:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

解

$$
\text{原式}=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500+3 & 200+1 & 300-2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500 & 200 & 300 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{(①,③)}{=\!=\!=}0-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -7 & 11 \end{vmatrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}=-70.
$$

在例1的第三步计算中,(①,③)在"="下方,它表示把矩阵的第1,3列互换位置.类似于矩阵的初等行变换,有矩阵的**初等列变换**:

1° 把矩阵的一列的倍数加到另一列上;

2° 互换两列的位置;

3° 用数域 k 中一个非零数乘矩阵的某一列.

例2 计算下述 n 阶行列式:

$$
\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.
$$

解 这个 n 阶行列式的特点是:每一行的元素之和等于常数 $a+(n-1)b$.因此,把第2列、第3列,…,第 n 列都加到第1列上,就可以使第1列有公因子 $a+(n-1)b$,把它提出去,则第1列元素全为1.从而用行列式的性质7容易化成上三角形行列式.今后我们约定对于行列式的行进行变换的记号写在等号上面,而对于列进行变换的记号写在等号下面.

$n\geqslant 2$ 时,有

$$\text{原式}\xlongequal[\substack{①+② \\ ①+③ \\ \cdots\ \cdots \\ ①+ⓝ}]{} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{②+①\cdot(-1) \\ ③+①\cdot(-1) \\ \cdots\ \cdots \\ ⓝ+①\cdot(-1)}]{} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

$n=1$ 时,上述公式也成立.

例 3 计算下述 3 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}.$$

解 这个 3 阶行列式的每一列都是两组数的和.根据性质 3(对于列来叙述),先按第 1 列可以拆成 2 个行列式的和;接着对每个行列式按第 2 列又可以拆成 2 个行列式的和,共可拆成 4 个行列式的和;最后对每个行列式按第 3 列拆成 2 个行列式的和,总共拆成 8 个行列式的和.其中每个行列式是从下述 4 组数中取出 3 列(可以相同)形成的:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

由于第 2,3 组数成比例,第 2,4 组数成比例,第 3,4 组数成比例,因此上述 8 个行列式或者有两列相同,或者有两列成比例,从而它们的值都为 0.由此得出,原行列式的值为 0.

习 题 2.3

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} -1 & 203 & \frac{1}{3} \\ 3 & 298 & \frac{1}{2} \\ 5 & 399 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$.

3. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 & c_1 - a_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 & c_2 - a_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

4. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$；

*(3) $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$,

其中 $a_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$.

§4 行列式按一行(列)展开

我们来研究 3 阶行列式与 2 阶行列式的关系：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 5 & 6\\0 & 4 & 7\end{vmatrix} &= 2\times5\times7+1\times6\times0+3\times0\times4\\&\quad-3\times5\times0-1\times0\times7-2\times6\times4\\&=2\times(5\times7-6\times4)+1\times(6\times0-0\times7)+3\times(0\times4-5\times0)\\&=2\times\begin{vmatrix}5 & 6\\4 & 7\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}0 & 6\\0 & 7\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}0 & 5\\0 & 4\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{1}$$

(1) 式中，$\begin{vmatrix}5 & 6\\4 & 7\end{vmatrix}$是划去 3 阶行列式的第 1 行和第 1 列，剩下的元素按原来次序组成的 2 阶行列式，称它为(1,1)元的余子式. 类似地，(1) 式中第 2 个行列式是(1,2)元的余子式，第 3 个行列式是(1,3)元的余子式. 为了使(1)式中各项所带的符号都变成正号，我们把(1)式写成

$$2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\4 & 7\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 6\\0 & 7\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 5\\0 & 4\end{vmatrix}. \tag{2}$$

把(2)式中的

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\4 & 7\end{vmatrix},(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 6\\0 & 7\end{vmatrix},(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 5\\0 & 4\end{vmatrix}$$

分别称为(1,1)元的代数余子式，(1,2)元的代数余子式，(1,3)元的代数余子式. 于是从上面的讨论得出：

3 阶行列式等于它的第 1 行元素与自己的代数余子式的乘积之和.

我们猜想这一结论对于 n 阶行列式的任意一行也成立.

定义 1 n 阶行列式 $|A|$ 中，划去第 i 行和第 j 列，剩下的元素按原来次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为 A 的(i,j)元的**余子式**，记作 M_{ij}. 令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij} 是 A 的(i,j)元的**代数余子式**.

定理 1 n 阶行列式 $|A|$ 等于它的第 i 行元素与自己的代数余子式的乘积之和. 即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \tag{3}$$

其中 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，$\sum\limits_{j=1}^{n}$ 表示对于 $j = 1,2,3,\cdots,n$ 求和.(3)式称为 n 阶行列式按第 i 行的展开式.

我们来证明4阶行列式按第2行的展开式,其方法也适用于 n 阶行列式的一般情形.

把 4 阶行列式 $|A|$ 的 4!项按照第 2 行的 4 个元素分成 4 组:

$$|A| = \sum_{k_1jk_3k_4} (-1)^{\tau(k_1jk_3k_4)} a_{1k_1}a_{2j}a_{3k_3}a_{4k_4}$$
$$= \sum_{j=1}^{4} a_{2j}\Big(\sum_{k_1k_3k_4} (-1)(-1)^{\tau(jk_1k_3k_4)} a_{1k_1}a_{3k_3}a_{4k_4}\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^{4} a_{2j}(-1)\Big(\sum_{k_1k_3k_4} (-1)^{(j-1)+\tau(k_1k_3k_4)} a_{1k_1}a_{3k_3}a_{4k_4}\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^{4} a_{2j}(-1)(-1)^{j-1}\Big(\sum_{k_1k_3k_4} (-1)^{\tau(k_1k_3k_4)} a_{1k_1}a_{3k_3}a_{4k_4}\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^{4} a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} = \sum_{j=1}^{4} a_{2j}A_{2j}.$$

这就证明了4阶行列式 $|A|$ 等于它的第2行元素与自己的代数余子式的乘积之和. ▌

由于行列式中行与列的地位是对称的,因此从定理 1 和性质 1 可以得出

定理 2 n 阶行列式 $|A|$ 等于它的第 j 列元素与自己的代数余子式的乘积之和.即

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \tag{4}$$

其中 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$.(4) 式称为行列式按第 j 列的展开式. ▌

利用行列式的性质7等可以把行列式的某一行(或某一列)的许多元素变成0,然后按这一行(或这一列)展开,就可把 n 阶行列式转化为 $n-1$ 阶行列式,减少计算量.这是计算行列式的又一个基本方法.

例 1 计算下述行列式:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \\ 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

解 为了尽量避免分数运算,选择元素1所在的第2行(或第2列),把该行(列)的其余元素变成0,然后按这一行(列)展开.

$$\text{原式}\xlongequal[\substack{①+②\cdot 4\\ ③+②\cdot 2\\ ④+②\cdot(-3)}]{}\begin{vmatrix} -10 & -3 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 4 & 14 & -19 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -10 & 1 & 14 \\ 19 & 14 & -19 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[②+③\cdot 1]{}\begin{vmatrix} -10 & 15 & 14 \\ 19 & -5 & -19 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= 1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 19 & -5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -10 & 3 \\ 19 & -1 \end{vmatrix} = -235.$$

例2 计算下述行列式:

$$\begin{vmatrix} a-6 & 2 & -2 \\ 2 & a-3 & -4 \\ -2 & -4 & a-3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\text{原式}\xlongequal{③+②\cdot 1}\begin{vmatrix} a-6 & 2 & -2 \\ 2 & a-3 & -4 \\ 0 & a-7 & a-7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[②+③\cdot(-1)]{}\begin{vmatrix} a-6 & 4 & -2 \\ 2 & a+1 & -4 \\ 0 & 0 & a-7 \end{vmatrix}$$

$$= (a-7)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a-6 & 4 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-7)(a^2-5a-14) = (a-7)^2(a+2).$$

例3 计算下述 n 阶行列式($n>1$):

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解 先按第 1 列展开,得

$$\text{原式} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$+ b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= aa^{n-1} + (-1)^{n+1}bb^{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}b^n.$$

把下述 3 阶行列式 $|A|$ 的第 1 行元素与第 2 行相应元素的代数余子式相乘,然后相加,结果如何呢?

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$a_1A_{21} + a_2A_{22} + a_3A_{23}$$

$$= a_1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

这表明 3 阶行列式的第 1 行元素与第 2 行相应元素的代数余子式的乘积之和等于 0. 我们猜想对于 n 阶行列式也有类似的结论.

定理 3 n 阶行列式 $|A|$ 的第 i 行元素与第 k 行($k \neq i$)相应元素的代数

余子式的乘积之和等于零.即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0, \quad \text{当 } k \neq i, \tag{5}$$

其中 $i, k \in \{1,2,\cdots,n\}$.

证明 设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

把下述 n 阶行列式按第k行展开,并且注意它的(k,j)元的代数余子式与$|A|$的(k,j)元的代数余子式 A_{kj} 一样,因此有

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}.$$

由于行列式的行与列的地位对称,因此也有 ▌

定理 1′ n 阶行列式$|A|$的第j列元素与第l列$(l \neq j)$相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.即

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{il} = 0, \quad \text{当 } l \neq j, \tag{6}$$

其中 $j, l \in \{1,2,\cdots,n\}$. ▌

公式(3)、(5)与公式(4)、(6)可以分别写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} |A|, & \text{当 } k = i, \\ 0, & \text{当 } k \neq i; \end{cases} \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{il} = \begin{cases} |A|, & \text{当 } l = j, \\ 0, & \text{当 } l \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

下述 n 阶行列式有什么特点?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

它的第 1 行元素全是 1,第 2 行元素是 n 个数,第 3 行元素是这 n 个数的平方,…,第 n 行元素是这 n 个数的 $(n-1)$ 次方. 这样的行列式称为**范德蒙(Vandermonde)行列式**.它的值等于什么呢?

$n=2$ 时,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

$n=3$ 时,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}
&\xlongequal[③+①\cdot(-a_1^2)]{②+①\cdot(-a_1)}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) & (a_3 - a_1)(a_3 + a_1) \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 + a_1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)[(a_3 + a_1) - (a_2 + a_1)] \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).
\end{aligned}$$

由上述受到启发,我们猜想 n 阶范德蒙行列式($n \geqslant 2$) 的值为

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \\
&\quad \cdot (a_3 - a_2)\cdots(a_n - a_2) \\
&\quad \cdot \cdots\cdots \\
&\quad \cdot (a_n - a_{n-1})
\end{aligned}$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j), \tag{10}$$

其中$\prod$是连乘号.

证明 对范德蒙行列式的阶数 n 作数学归纳法.

$n = 2$ 时,上面已证明结论成立.

假设对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立.我们来看 n 阶范德蒙行列式的情形.把第 $n-1$ 行的$(-a_1)$倍加到第 n 行上,然后把第 $n-2$ 行的$(-a_1)$倍加到第 $n-1$ 行上,依次类推,最后把第1行的$(-a_1)$倍加到第2行上,得到

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & a_3^{n-2} - a_1 a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & a_3^{n-3}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{用归纳假设}} (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

据数学归纳法原理,对一切大于1的正整数,结论都成立. ▌

范德蒙行列式在许多实际问题中出现,我们可以用公式(10)立即写出它的值.从公式(10)还可看出:n 阶范德蒙行列式等于零当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数中至少有两个相等.因此,如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不等,则范德蒙行列式不等于零.

习　题　2.4

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}$.

2. 计算下述 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

3. 计算下述 n 阶行列式($n \geqslant 2$)：

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

4. 用数学归纳法证明：对一切 $n \geqslant 2$，有

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_n.$$

5. 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

6. 计算下述 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

7. 解方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ x^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}=0,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是两两不同的数.

8. 计算下述 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & n \end{vmatrix}.$$

*9. 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & & & & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix},\ y\neq z.$$

10. 计算下述 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

11. 设数域 K 上 n 级矩阵 $A=(a_{ij})$，它的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}. 把 A 的每个元素都加上同一个数 t，得到的矩阵记作 $A(t)=(a_{ij}+t)$. 证明：

$$|A(t)| = |A| + t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

12. 用第 11 题给出的计算 $|A(t)|$ 的公式，计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1+t & t & t & \cdots & t \\ t & 2+t & t & \cdots & t \\ t & t & 3+t & \cdots & t \\ \vdots & & & & \vdots \\ t & t & t & \cdots & n+t \end{vmatrix}$.

§5 克莱姆(Cramer)法则

在本章开头的命题 1′ 里，我们证明了：两个方程的二元一次方程组有唯一解的充分必要条件是它的系数行列式 $|A|\neq 0$，此时它的唯一解是

$$\left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}\right),$$

其中 $|B_1|$ 是把 $|A|$ 中第 1 列换成常数项，第 2 列不动得到的行列式，$|B_2|$ 是把 $|A|$ 中第 2 列换成常数项得到的行列式.

上述结论对于 n 个方程的 n 元线性方程组是否成立？本节就来探讨这个问题.

数域 K 上 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

的系数矩阵用 A 表示，增广矩阵用 $\tilde{A}$ 表示，显然 $\tilde{A}$ 是在 A 的右边添上常数项组成的一列.

对增广矩阵 $\tilde{A}$ 施行初等行变换化成阶梯形矩阵，记作 $\tilde{J}$，则系数矩阵 A 经过这些初等行变换也被化成阶梯形矩阵，记作 J，显然 J 比 $\tilde{J}$ 少了最后一列.

据本章 §3 的评注[2] 得，$|J| = l|A|$，其中 l 是 K 中某个非零数.

情形 1　设 $|A| \neq 0$，则 $|J| \neq 0$. 于是 J 没有零行，因此 J 的 n 行都是非零行，从而 J 有 n 个主元. 由于 J 只有 n 列，因此 J 的 n 个主元分别位于第 1, 2, …, n 列. 从而 J 必定形如

$$J = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $c_{11}c_{22}\cdots c_{nn} \neq 0$. 由于 $\tilde{J}$ 比 J 多一列，因此 $\tilde{J}$ 形如

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \end{pmatrix}.$$

由此看出原方程组(1) 有解，由于 $\tilde{J}$ 的非零行数目等于未知量数目 n，从而原方程组(1) 有唯一解.

情形 2　设 $|A| = 0$，则 $|J| = 0$. 我们断言 J 必有零行(否则，J 的 n 行全是非零行，据情形 1 的讨论过程知道，此时 $|J| = c_{11}c_{12}\cdots c_{nn} \neq 0$，矛盾). 因此 J 的非零行数目 $r < n$. 从而 J 必定形如

$$J = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $c_{11}c_{2j_2}\cdots c_{rj_r} \neq 0$. 于是 $\tilde{J}$ 形如

$$\tilde{J}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $d_{r+1}\neq 0$ 时,原方程组(1)无解,当 $d_{r+1}=0$ 时,原方程组有解;由于 $\tilde{J}$ 的非零行数目 $r<n$,因此原方程组有无穷多个解.

综上述,我们得到了下述结论:

定理 1 n 个方程的 n 元线性方程组,如果它的系数行列式 $|A|\neq 0$,则它有唯一解;如果它的系数行列式 $|A|=0$,则它无解或者有无穷多个解.从而,n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解的充分必要条件是它的系数行列式不等于0. ▌

把定理1应用到齐次线性方程组上便得到下述结论.

推论 2 n 个方程的 n 元齐次线性方程组只有零解的充分必要条件是它的系数行列式不等于0.从而,n 个方程的 n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于零. ▌

定理1使得我们对于 n 个方程的 n 元线性方程组不用对它的增广矩阵进行初等行变换,而只需计算它的系数行列式,就可以判断方程组是否有唯一解.

推论2使得我们对于 n 个方程的 n 元齐次线性方程组不用对它的系数矩阵进行初等行变换,只需计算它的系数行列式,就可以判断齐次线性方程组有没有非零解.

例 1 判断下述线性方程组是否有唯一解:

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b_1, \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_n^2x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_1^nx_1+a_2^nx_2+\cdots+a_n^nx_n=b_n, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不同的非零数.

解 方程组(2)的方程数目等于未知量数目 n,考虑它的系数行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不同，而且它们都不等于0，因此上述行列式不等于0. 从而方程组(2)有唯一解.

例2 当 λ 取什么值时，下述齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases} (\lambda-6)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (\lambda-3)x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + (\lambda-3)x_3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

解 先计算齐次线性方程组的系数行列式：

$$\begin{vmatrix} \lambda-6 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-3 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-3 & -4 \\ 0 & \lambda-7 & \lambda-7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-6 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-7 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-7)\begin{vmatrix} \lambda-6 & 4 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-7)(\lambda^2-5\lambda-14) = (\lambda-7)^2(\lambda+2).$$

于是，齐次线性方程组(3)有非零解

$$\Longleftrightarrow (\lambda-7)^2(\lambda+2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = 7 \text{ 或 } \lambda = -2.$$

为了探讨 n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解时，这个解是什么，我们需要了解连加号 $\sum$ 的性质.

设有 $m \cdot n$ 个数相加：

$$\begin{aligned} S = {} & c_{11} + c_{12} + \cdots + c_{1n} \\ & + c_{21} + c_{22} + \cdots + c_{2n} \\ & + \cdots \\ & + c_{m1} + c_{m2} + \cdots + c_{mn}. \end{aligned} \tag{4}$$

我们可以按照(4)式的行分组，先分别把第1行、第2行、…、第 m 行的 n 个元素相加，然后再求所得数的和：

$$S=\left(\sum_{j=1}^{n}c_{1j}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}c_{2j}\right)+\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n}c_{mj}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\right).\tag{5}$$

我们也可以按照(4)式的列分组,先分别把第1列、第2列、…、第 n 列的 m 个元素相加,然后再求所得数的和:

$$S=\left(\sum_{i=1}^{m}c_{i1}\right)+\left(\sum_{i=1}^{m}c_{i2}\right)+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{m}c_{in}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}c_{ij}\right).\tag{6}$$

从(5)式和(6)式得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}c_{ij}\right).\tag{7}$$

公式(7)将在下面用到,以后也经常用到.

定理3 n 个方程的 n 元线性方程组(1)的系数行列式 $|A|\neq 0$ 时,它的唯一解是

$$\left(\frac{|B_1|}{|A|},\frac{|B_2|}{|A|},\cdots,\frac{|B_n|}{|A|}\right),\tag{8}$$

其中 $|A|$ 是方程组的系数行列式,并且

$$|B_j|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\tag{9}$$

$j=1,2,\cdots,n$.

证明 为了证有序数组(8)是方程组(1)的解,只要把它们代入(1)的每一个方程,看是否变成恒等式.对于 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,把(8)式代入第 i 个方程,计算它的左边的值:

$$a_{i1}\frac{|B_1|}{|A|}+a_{i2}\frac{|B_2|}{|A|}+\cdots+a_{in}\frac{|B_n|}{|A|}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{|B_j|}{|A|}=\frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|B_j|.\tag{10}$$

把(9)式中的行列式按照第 j 列展开,注意它的 (k,j) 元的代数余子式与 $|A|$ 的 (k,j) 元的代数余子式 A_{kj} 一致,因此得到

$$|B_j|=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}.\tag{11}$$

把(11)式代入(10)式得,第 i 个方程的左边的值为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|B_j| &= \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}\right) \\
&= \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_k A_{kj}\right) = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_k A_{kj}\right) \\
&= \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}\left(b_k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right) \\
&= \frac{1}{|A|}(b_1\cdot 0+\cdots+b_{i-1}\cdot 0+b_i|A|+b_{i+1}\cdot 0+\cdots+b_n\cdot 0) \\
&= b_i.
\end{aligned}$$

b_i 是第 i 个方程的右边的值.因此,有序数组(8)是方程组(1)的解. ▌

定理1的充分性和定理3合起来称为**克莱姆(Cramer)法则**.定理1的必要性是本书作者给出的.

利用行列式的性质和按一行(列)展开的定理,我们解决了 n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解的判定和解的公式表示.行列式的应用远不止于线性方程组,它在几何、分析等各个数学分支以及实际问题中都有重要应用.

习　题　2.5

1. 判断下述线性方程组有无解,有多少解.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 = b_1, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 = b_2, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 = b_3. \end{cases}$$

2. 判断下述线性方程组有无解,有多少解?

$$\begin{cases} a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = b_1, \\ a_1^3x_1 + a_2^3x_2 + \cdots + a_n^3x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_1^{n+1}x_1 + a_2^{n+1}x_2 + \cdots + a_n^{n+1}x_n = b_n, \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是两两不同的非零数.

3. 当 λ 取什么值时,下述齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + (\lambda-8)x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 14x_2 + (\lambda+3)x_3 = 0. \end{cases}$$

4. 当 a、b 取什么值时,下述齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. 当 a、b 取什么值时,下述线性方程组有唯一解?

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

6. 对于第 5 题中的线性方程组,当 a、b 为何值时,方程组无解?当 a、b 为何值时,方程组有无穷多个解?

7. 讨论下述线性方程组何时有唯一解?有无穷多个解?无解?

$$\begin{cases} a_1x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

§6　行列式按 k 行(列)展开

我们在本章 §4 讲了行列式按一行(列)展开定理.例如,3 阶行列式 $|A|$ 按第一行展开得

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

其中 3 个二阶行列式依次称为(1,1)元、(1,2)元、(1,3)元的余子式.现在我们反过来看,把这 3 个二阶行列式都称为 $|A|$ 的**子式**,而把 3 个一阶行列式 $|a_{11}|$、$|a_{12}|$、$|a_{13}|$ 分别叫做这 3 个子式的**余子式**.$|A|$ 的子式

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2}$$

是由 $|A|$ 的第 2、3 行与第 2、3 列交叉处的元素按原来的排法组成的二阶行列式,我们把它记作

$$A\begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 2, & 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中括号内上面一行是行指标，下面一行是列指标.

子式(3)的余子式$|a_{11}|$是A的1阶子式，类似地把它记作$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 把

$$(-1)^{(2+3)+(2+3)}A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{4}$$

称为子式(3)的代数余子式. $|A|$中第2,3行元素组成的二阶子式共有3个，它们都出现在公式(1)的右端. 运用子式和代数余子式的术语，3阶行列式按第一行展开的公式(1)又可以叙述成：

3阶行列式$|A|$中取定两行：第2、3行，这两行元素形成的所有2阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于$|A|$.

3阶行列式$|A|$中取定其他两行，也有类似的结论. 这称为3阶行列式$|A|$按两行展开.

对于n阶行列式是否也有类似的结论？

n阶行列式$|A|$中任意取定k行、k列$(1\leqslant k<n)$，位于这些行和列的交叉处的k^2个元素按原来的排法组成的k阶行列式，称为$|A|$的一个k阶子式. 如果取定第$i_1,i_2,\cdots,i_k$行$(i_1<i_2<\cdots<i_k)$，取定第$j_1,j_2,\cdots,j_k$列$(j_1<j_2<\cdots<j_k)$，则所得到的k阶子式记作

$$A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\j_1,j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix}. \tag{5}$$

划去子式(5)所在的第$i_1,i_2,\cdots,i_k$行，第$j_1,j_2,\cdots,j_k$列，剩下的元素按原来的排法组成的$(n-k)$阶行列式，称为子式(5)的**余子式**. 它前面乘以

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} \tag{6}$$

则称为子式(5)的**代数余子式**.

例如，5阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{vmatrix} \tag{7}$$

取定$|A|$的第1、2行，第4、5列得到的2阶子式为

$$A\begin{pmatrix}1,2\\4,5\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{14}&a_{15}\\a_{24}&a_{25}\end{vmatrix}. \tag{8}$$

子式(8)的余子式为

$$A\begin{pmatrix}3,4,5\\1,2,3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}\end{vmatrix}\tag{10}$$

子式(8) 的代数余子式为

$$(-1)^{(1+2)+(4+5)}A\begin{pmatrix}3,4,5\\1,2,3\end{pmatrix}.\tag{10}$$

5 阶行列式 $|A|$ 中,取定第 1,2 行,这两行元素形成的 2 阶子式的数目为

$$C_5^2=\frac{5\times4}{2!}=10.$$

当取定第 j_1,j_2 列($j_1<j_2$) 时,所得到的 2 阶子式为

$$A\begin{pmatrix}1, & 2\\j_1, & j_2\end{pmatrix},\tag{11}$$

子式(11) 的余子式为

$$A\begin{pmatrix}3, & 4, & 5\\j_1', & j_2', & j_3',\end{pmatrix},\tag{12}$$

其中 $\{j_1',j_2',j_3'\}$ 是 $\{j_1,j_2\}$ 对于全集 $\{1,2,3,4,5\}$ 的补集,并且 $j_1'<j_2'<j_3'$.

定理 1(Laplace) 在 n 阶行列式 $|A|$ 中,取定 k 行:第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行($i_1<i_2<\cdots<i_k$,且 $1\leqslant k<n$),则这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$.

我们对于 5 阶行列式 $|A|$ 来证明上述结论,这一证明方法对于 n 阶行列式也行得通.

在 5 阶行列式 $|A|$ 中,取定两行:第 i_1,i_2 行($i_1<i_2$),要证明下式成立:

$$|A|=\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant5}A\begin{pmatrix}i_1,i_2\\j_1,j_2\end{pmatrix}(-1)^{(i_1+i_2)+(j_1+j_2)}A\begin{pmatrix}i_1',i_2',i_3'\\j_1',j_2',j_3'\end{pmatrix},\tag{13}$$

其中 $\{i_1',i_2',i_3'\}$ 是 $\{i_1,i_2\}$ 对于全集 $\{1,2,3,4,5\}$ 的补集,且 $i_1'<i_2'<i_3'$; $\{j_1',j_2',j_3'\}$ 是 $\{j_1,j_2\}$ 的补集,且 $j_1'<j_2'<j_3'$.

证明 (13) 式左端 $|A|$ 是 $5!$项的代数和.我们来看右端是多少项的代数和.右端中的 2 阶子式是 $2!$项的代数和,3 阶子式是 $3!$项的代数和,它们的乘积展开后为 $2!3!$项的代数和.又由于右端连加号中求和的项数为 C_5^2,因此右端的代数和中的项数为

$$C_5^2\cdot2!3!=\frac{5!}{2!3!}2!3!=5!$$

这证明了(13) 式右端的项数等于左端的项数.如果我们能进一步证明右端的

每一项都是左端的某一项，则右端的 5!项的代数和就正好是左端的 5!项的代数和，从而右端与左端相等.

在(13) 式右端中任取一项：

$$(-1)^{\tau(\mu_1\mu_2)} a_{i_1\mu_1} a_{i_2\mu_2} (-1)^{(i_1+i_2)+(j_1+j_2)} (-1)^{\tau(\nu_1\nu_2\nu_3)} a_{i_1'\nu_1} a_{i_2'\nu_2} a_{i_3'\nu_3}, \tag{14}$$

其中 $\mu_1\mu_2$ 是 j_1, j_2 的 2 元排列，$\nu_1\nu_2\nu_3$ 是 j_1', j_2', j_3' 的 3 元排列. (13) 式左端 $|A|$ 中有如下一项：

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_1' i_2' i_3') + \tau(\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\nu_3)} a_{i_1\mu_1} a_{i_2\mu_2} a_{i_1'\nu_1} a_{i_2'\nu_2} a_{i_3'\nu_3}. \tag{15}$$

容易计算出下列各式：

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_1' i_2' i_3')} = (-1)^{(i_1-1)+[(i_2-1)-1]} = (-1)^{(i_1+i_2)-(1+2)},$$

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \nu_1\nu_2\nu_3)} &= (-1)^{(j_1-1)+[(j_2-1)-1]+\tau(\nu_1\nu_2\nu_3)} \\ &= (-1)^{(j_1+j_2)-(1+2)+\tau(\nu_1\nu_2\nu_3)}.\end{aligned}$$

设 $\mu_1\mu_2$ 经过 s 次对换变成 $j_1 j_2$，则 $(-1)^{\tau(\mu_1\mu_2)} = (-1)^s$，且

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\nu_3)} &= (-1)^s (-1)^{\tau(j_1 j_2 \nu_1\nu_2\nu_3)} \\ &= (-1)^{\tau(\mu_1\mu_2)} (-1)^{(j_1+j_2)-(1+2)+\tau(\nu_1\nu_2\nu_3)}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_1' i_2' i_3') + \tau(\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\nu_3)} \\ =\ &(-1)^{\tau(\mu_1\mu_2)} (-1)^{(i_1+i_2)+(j_1+j_2)} (-1)^{\tau(\nu_1\nu_2\nu_3)}.\end{aligned}$$

于是(14) 式和(15) 式相等. 这证明了(13) 式右端的每一项都是左端的一项.

▌

定理 1 称为**拉普拉斯(Laplace) 定理**(或行列式按 k 行展开定理).

由于行列式中行与列的地位对称，因此也有行列式按 k 列展开的定理：

定理 2 n 阶行列式 $|A|$ 中，取定 k 列 $(1 \leqslant k < n)$，则这 k 列元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$.

行列式按 k 行(列) 展开定理在计算某些特殊类型的行列式时发挥着重要作用. 看下面的例子.

例 1 证明下式成立：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

证明 把(16)式左端的行列式按前 k 行展开,这 k 行元素形成的 k 阶子式中,只有左上角的 k 阶子式的值可能不为零,其余的 k 阶子式一定包含零列,从而其值为0.左上角的 k 阶子式的余子式正好是右下角的 r 阶子式,并且

$$(-1)^{(1+2+\cdots+k)+(1+2+\cdots+k)}=1,$$

因此(16)式成立. ▌

令

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{pmatrix},$$

则(16)式可以简洁地写成

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{vmatrix}=|A_1|\,|A_2|. \tag{17}$$

注意(17)式中 A_1, A_2 都必须是方阵.

公式(17)是非常有用的.

习 题 2.6

1. 计算下述行列式:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 85 & 1 & 2 & 0 \\ 29 & 73 & 0 & 3 & 4 \\ 19 & 67 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. 计算下述行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

3. 计算下述行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{vmatrix}.$$

4. 设 $|A|$ 是关于 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的范德蒙行列式. 计算：

(1) $A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n-1 \\ 2,3,\cdots,n \end{pmatrix}$；　　(2) $A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n-1 \\ 1,3,\cdots,n \end{pmatrix}$.

应用与实验课题：行列式在几何中的应用

在几何空间中，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积仍然是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的长度规定为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \xlongequal{\text{def}} |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle, \tag{1}$$

它的方向规定为：与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均垂直，并且是当右手四指从 $\boldsymbol{a}$ 弯向 $\boldsymbol{b}$（转角小于 π）时拇指的指向. 如图 2－1 所示.

从上述定义看出，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积. 这使得我们可以利用向量的外积来研究平行四边形或三角形的面积，以及平行六面体的体积.

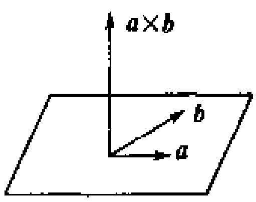


图 2－1

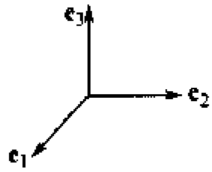


图 2－2

在空间中取一个右手直角坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$,如图 2－2 所示.从外积的定义可得出

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,$$
$$\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0},$$

其中 $i=1,2,3$.

从外积的定义可看出

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}. \tag{2}$$

从外积的定义还可以得出

$$(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \tag{3}$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}, \tag{4}$$
$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}. \tag{5}$$

运用上述事实以及向量的内积的定义和性质,做下述题目:

1. 在空间右手直角坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中,两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为$(a_1,a_2,0),(b_1,b_2,0)$.

(1) 求以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积,并且把结果用一个行列式表示.

(2) 求以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两边的三角形的面积,并且把结果用一个行列式表示.

2. 在空间右手直角坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中,三个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标分别为

$$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3).$$

求以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积,并且把结果用一个行列式表示.参看图 2－3.

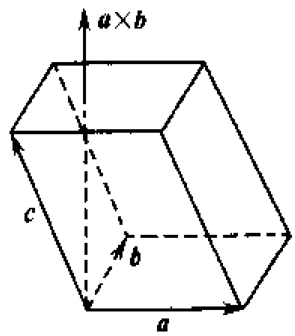


图 2－3

第 3 章　线性方程组的进一步理论

为了直接用线性方程组的系数和常数项判断方程组有没有解，有多少解，我们在第 2 章给出了用系数行列式判断 n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解的充分必要条件. 这一判定方法只适用于方程数目与未知量数目相等的线性方程组；而且当系数行列式等于零时，只能得出方程组无解或有无穷多个解的结论，没有区分出何时无解，何时有无穷多个解. 能不能对于任意的线性方程组，给出直接从它的系数和常数项判断方程组有没有解，有多少解的方法呢？为此我们需要探讨和建立线性方程组的进一步理论. 这一理论还将使我们弄清楚线性方程组有无穷多个解时解集的结构.

判断下述线性方程组有没有解？有多少解？

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2, \\ x_1 - 2x_2 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 = -9. \end{cases}$$

我们按照第一章给出的方法，把方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 3 & -4 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此看出，方程组有解，并且有唯一解.

在上述化成阶梯形矩阵的过程中，需要把一行的倍数加到另一行上. 例如，把第 1 行的 (-3) 倍加到第 3 行上. 第 1 行的 (-3) 倍可以写成

$$(-3)(1, -1, -2) = (-3, 3, 6), \tag{1}$$

再把它加到第 3 行上，可以写成

$$(-3, 3, 6) + (3, -4, -9) = (0, -1, -3). \tag{2}$$

从上述例子受到启发，为了研究直接从线性方程组的系数和常数项判断它有没有解，有多少解的问题，需要在所有 n 元有序数组组成的集合中，规定像 (2) 式那样的加法运算，以及像 (1) 式那样的数量乘法运算. 因此这一章我们将研究规定了加法和数量乘法运算的 n 元有序数组的集合的结构，然后利用它研究如何直接从线性方程组的系数和常数项判断方程组有无解，有多少解的问题，以及方程组有无穷多个解时解集的结构问题.

§1 n 维向量空间 K^n

取定一个数域 K，设 n 是任意给定的一个正整数. 令

$$K^n \xlongequal{\text{def}} \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in K, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

K^n 中两个元素 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 称为相等，如果 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$.

K^n 中的元素用小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 表示.

在 K^n 中规定加法运算如下：

$$\begin{aligned}&(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n)\\ &\xlongequal{\text{def}} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n).\end{aligned} \tag{1}$$

在 K 的元素与 K^n 的元素之间规定数量乘法运算如下：

$$k(a_1, a_2, \cdots, a_n) \xlongequal{\text{def}} (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n). \tag{2}$$

容易直接验证加法和数量乘法满足下述 8 条运算法则：对于任意 $\alpha, \beta, \gamma \in K^n$，任意 $k, l \in K$，有

1° $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ （**加法交换律**）；

2° $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ （**加法结合律**）；

3° 把元素 $(0, 0, \cdots, 0)$ 记作 0，它使得

$$0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha,$$

称 0 是 K^n 的**零元素**；

4° 对于 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n$，令

$$-\alpha \xlongequal{\text{def}} (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n) \in K^n,$$

我们有

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0,$$

称 $-\alpha$ 是 α 的**负元素**；

5° $1\alpha = \alpha$；

6° $(kl)\alpha = k(l\alpha)$；

7° $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$；

8° $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.

定义 1 数域 K 上所有 n 元有序数组组成的集合 K^n，连同定义在它上面的加法运算和数量乘法运算及其满足的 8 条运算法则一起，称为数域 K 上的

一个 **n 维向量空间**. K^n 的元素称为 **n 维向量**;设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,称 a_i 是 α 的第 i 个**分量**.

在 n 维向量空间 K^n 中,可以定义减法运算如下:

$$\alpha-\beta \xlongequal{\text{def}} \alpha+(-\beta). \tag{3}$$

在 n 维向量空间 K^n 中,容易直接验证下述 4 条性质:

$$0\alpha=0; \tag{4}$$

$$(-1)\alpha=-\alpha; \tag{5}$$

$$k0=0; \tag{6}$$

$$k\alpha=0 \Rightarrow k=0 \text{ 或者 } \alpha=0. \tag{7}$$

n 元有序数组可以写成一行:$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,称它为**行向量**. 也可以把 n 元有序数组写成一列:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

称它为**列向量**. 把写成列的所有 n 元有序数组组成的集合仍记作 K^n,并且在 K^n 中类似地定义加法运算,在 K 的元素与 K^n 的元素之间定义数量乘法运算,它们仍满足 8 条运算法则,因此这时 K^n 也是数域 K 上的一个 n 维向量空间. 它与前面所说的 n 维向量空间 K^n 没有本质的区别,只是元素的写法不同而已.

例如,数域 K 上的 $s\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

A 的每一行是 n 维行向量,把第 i 个行向量 $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 记作 γ_i,则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 称为 A 的**行向量组**. A 的每一列是 s 维列向量,把第 j 个列向量

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{pmatrix}$$

记作 α_j,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为 A 的**列向量组**.

在 K^n 中,给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,任给 K 中一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,我们把 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个**线性组合**,把 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,称为**系数**.

对于 $\beta\in K^n$,如果存在 K 中一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 使得

$$\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s, \tag{8}$$

则称 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性表出**.

利用向量的加法运算和数量乘法运算,我们可以把数域 k 上 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s, \end{cases} \tag{9}$$

写成

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}. \tag{10}$$

令

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix},$$

则线性方程组可以写成

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta, \tag{11}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是方程组的系数矩阵的列向量组,β 是常数项组成的列向量.于是

数域 K 上线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解

$\Longleftrightarrow K$ 中存在一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,使得下式成立:

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=\beta$$

$\Longleftrightarrow\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **线性表出**.　(12)

这样我们把线性方程组有没有解的问题归结为:**常数项列向量 β 能不能由系数矩阵的列向量组线性表出**.这个结论具有双向作用:一方面,为了从理论上研究线性方程组有没有解,就需要去研究 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出;另

一方面,对于 K^n 中给定的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,以及给定的 β,为了判断 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出,就可以去判断线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 是否有解(用第1章给出的判定方法).

例1　K^3 中,设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-5\\12\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},$$

判断 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,若能够,写出它的一种表出方式.

解　把线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix}1&5&1&2\\2&-5&-3&-1\\-3&12&6&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&5&1&2\\0&-15&-5&-5\\0&27&9&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&5&1&2\\0&3&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此看出,线性方程组有解.从而 β 能够由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

为了写出一种表出方式,我们把阶梯形矩阵进一步化成简化行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix}1&5&1&2\\0&3&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{3}x_3+\dfrac{1}{3},\\x_2=-\dfrac{1}{3}x_3+\dfrac{1}{3},\end{cases}$$

其中 x_3 是自由未知量.令 $x_3=1$,得 $x_1=1,x_2=0$.于是

$$\beta=\alpha_1+\alpha_3.$$

由于方程组有无穷多个解,因此 β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出的方式有无穷多种.

在 K^n 中,从理论上如何判断任一向量 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出?从线性表出的定义知道,这需要考察 β 是否等于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的某一个线性组合.为此我们把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的所有线性组合组成一个集合 W,即

$$W\xlongequal{\text{def}}\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\mid k_i\in K,i=1,2,\cdots,s\}.$$

如果我们能够把 W 的结构研究清楚,那么就比较容易判断 β 是否属于 W,也

就是判断 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

现在我们来研究 W 的结构. 任取 $\alpha,\gamma\in W$, 设

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_s\alpha_s,\ \gamma=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_s\alpha_s,$$

则

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma&=(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_s\alpha_s)+(b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_s\alpha_s)\\&=(a_1+b_1)\alpha_1+(a_2+b_2)\alpha_2+\cdots+(a_s+b_s)\alpha_s,\end{aligned}$$

从而 $\alpha+\gamma\in W$.

任取 $k\in K$, 则

$$\begin{aligned}k\alpha&=k(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_s\alpha_s)\\&=(ka_1)\alpha_1+(ka_2)\alpha_2+\cdots+(ka_s)\alpha_s,\end{aligned}$$

从而 $k\alpha\in W$.

由此受到启发, 我们引出一个概念:

定义 2　K^n 的一个非空子集 U 如果满足:

1°　$\alpha,\gamma\in U\Longrightarrow\alpha+\gamma\in U$,

2°　$\alpha\in U,k\in K\Longrightarrow k\alpha\in U$,

则称 U 是 K^n 的一个**线性子空间**, 简称为**子空间**.

性质 1° 称为 U 对于 K^n 的加法封闭; 性质 2° 称为 U 对于数量乘法封闭.

$\{0\}$ 是 K^n 的一个子空间, 称它为零子空间. K^n 本身也是 K^n 的一个子空间.

从上面的讨论知道, K^n 中, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的所有线性组合组成的集合 W 是 K^n 的一个子空间, 称它为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **生成的子空间**, 记作

$$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle.$$

于是我们有下述结论:

命题 1　数域 K 上 n 元线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解

$\Longleftrightarrow\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出

$\Longleftrightarrow\beta\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$. ▌

这样我们把判断线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有没有解的问题归结为: 判断 β 是否属于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 生成的子空间 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$ 的问题. 为此我们在下面三节来深入研究 K^n 中由给定的向量组生成的子空间的结构.

习　题　3.1

1. 在 K^4 中, 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\7\\-2\\6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-10\\-25\\16\\-12\end{pmatrix}.$$

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的分别以下列各组数为系数的线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$:

(1) $k_1=-2,k_2=3,k_3=1$;

(2) $k_1=0,k_2=0,k_3=0$.

2. 在 K^4 中,设 $\alpha=(6,-2,0,4)',\beta=(-3,1,5,7)'$.求向量 γ 使得 $2\alpha+\gamma=3\beta$.

3. 在 K^4 中,判断向量 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.若能,写出它的一种表示方式.

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\-5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\7\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-4\\1\\-2\\6\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}8\\3\\-1\\-25\end{pmatrix}$;

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-5\\0\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-5\\-6\\3\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-8\\-3\\7\\10\end{pmatrix}$;

(3) $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-5\\2\\-4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\7\\-3\\6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\11\\-5\\10\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\30\\13\\-26\end{pmatrix}$.

4. 在 K^n 中,令

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

证明:K^n 中任一向量

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

能够由向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出,并且表出方式唯一,写出这种表出方式.

5. 在 K^4 中,设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

证明:K^4 中任一向量

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}$$

可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出,并且表出方式唯一,写出这种表出方式.

6. 证明:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一向量 α_i 可以由这个向量组线性表出.

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in K^n$,说明 $\alpha_i\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$, $i=1,2,\cdots,s$.

8. 设 $r<n$,证明 K^n 的下述子集 W 是一个子空间:

$$W=\{(a_1,a_2,\cdots,a_r,0,\cdots,0)\mid a_i\in K, i=1,2,\cdots,r\}.$$

§2 线性相关与线性无关的向量组

在上一节中,我们把线性方程组有没有解的问题归结为:常数项列向量能不能由系数矩阵的列向量组线性表出.如何研究 K^n 中一个向量能不能由一个向量组线性表出呢?

实数域 $\mathbf{R}$ 上的3维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的元素是3元有序实数组.在几何空间(由所有以原点为起点的向量组成)中,取定一个坐标系后,每个3元有序实数组表示一个向量.因此可以把 $\mathbf{R}^3$ 看成几何空间.这样我们可以从几何空间受到启发,来研究 K^n 中一个向量能否由向量组线性表出的问题.

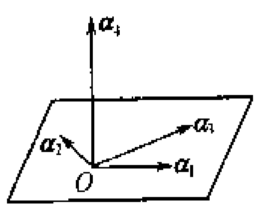


图 3 - 1

几何空间中,设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线.如果 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面;如果 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 不共面.如图 3 - 1

所示.从解析几何知道(参看丘维声编《解析几何》(北京大学出版社出版)第8页)

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面的充分必要条件是有不全为零的实数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 不共面的充分必要条件是:从

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$$

可以推出 $k_1=0,k_2=0,k_4=0$.

从几何空间的上述例子受到启发,在 K^n 中为了研究一个向量能不能由一个向量组线性表出,就需要研究像上述两种类型的向量组.

定义1 K^n 中向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$ 称为是**线性相关**的,如果有 K 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0. \tag{1}$$

定义2 K^n 中向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$ 如果不是线性相关的,则称为**线性无关**的.即如果从

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

可以推出所有系数 $k_1,\cdots,k_s$ 全为0,则称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是**线性无关**的.

根据定义1和定义2以及解析几何的结论得,几何空间中,共面的三个向量是线性相关的,不共面的三个向量是线性无关的;共线的两个向量是线性相关的,不共线的两个向量是线性无关的.

下面看几个简单的例子.

(1) 包含零向量的向量组一定线性相关.这是因为

$$1\cdot 0+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_s=0.$$

(2) 单个向量 α 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 存在 $k\neq 0$ 使得 $k\alpha=0$

$\Longleftrightarrow \alpha=0.$

由此立即得出

$$\text{单个向量 }\alpha\text{ 线性无关}\Longleftrightarrow \alpha\neq 0.$$

(3) K^n 中,向量组

$$\epsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\epsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\cdots,\epsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

是线性无关的.

证明 设 $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0$,即

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

由此得出,$k_1=0,k_2=0,k_3=0,\cdots,k_n=0$.因此向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性无关的. ∎

今后在 K^n 中,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 总是表示只有一个分量为1,其余分量全为0的列向量.

评注

K^n 中线性相关的向量组与线性无关的向量组的本质区别可以从以下几个方面刻画.

1. 从线性组合看.

(1) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$ **线性相关**

$\Longleftrightarrow$ 它们**有系数不全为零**的线性组合等于**零向量**.

(2) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$ **线性无关**

$\Longleftrightarrow$ 它们**只有系数全为零**的线性组合才会等于**零向量**.

2. 从线性表出看.

(1) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$ **线性相关**

$\Longleftrightarrow$ 其中**至少有一个向量**可以由**其余向量**线性表出.

证明 必要性.设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$ 线性相关,由定义1得,有 K 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0. \tag{2}$$

设 $k_i\neq 0$,由(2)式得

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{k_s}{k_i}\alpha_s.$$

这表明 α_i 可以由向量组的其余向量(除去 α_i 以外的向量)线性表出.

充分性. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$ 中有一个向量 α_j 可以由其余向量线性表出,即

$$\alpha_j = l_1\alpha_1 + \cdots + l_{j-1}\alpha_{j-1} + l_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + l_s\alpha_s.$$

移项得

$$l_1\alpha_1 + \cdots + l_{j-1}\alpha_{j-1} - \alpha_j + l_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + l_s\alpha_s = 0. \tag{3}$$

(3) 式左端的系数中至少有一个数 $-1\neq 0$,因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关. ▌

(2) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$ **线性无关**

$\Longleftrightarrow$ 其中**每一个向量**都不能由**其余向量**线性表出.

3. 从齐次线性方程组看.

(1) 列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$ **线性相关**

$\Longleftrightarrow$ 有 K 中不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ **有非零解**.

(2) 列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$ **线性无关**

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ **只有零解**.

4. 从行列式看.

(1) n 个 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **线性相关**

$\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为列向量组的矩阵的**行列式等于零**.

(2) n 个 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **线性无关**

$\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为列向量组的矩阵的**行列式不等于零**.

由于行向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关当且仅当列向量组 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n'$ 线性相关,并且 $|A| = |A'|$,因此也有

n 个 n 维行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关(线性无关)

$\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为行向量组的矩阵的行列式等于零(不等于零).

例 1 证明:如果向量组的一个部分组线性相关,则整个向量组也线性相关.

证明 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_s$ 的一个部分组,譬如说,$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 线性相关,则有 K 中不全为零的数 $k_1,\cdots,k_t$ 使得 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_t\alpha_t = 0$. 从而有

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_t\alpha_t + 0\alpha_{t+1} + \cdots + 0\alpha_s = 0.$$

由于 $k_1,\cdots,k_t,0,\cdots,0$ 不全为零,因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_s$ 线性相关. ▌

由例1立即得到:如果向量组线性无关,则它的任何一个部分组也线性无关.

例2 证明:如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关.

证明 设

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0. \tag{4}$$

整理得

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0. \tag{5}$$

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,于是从(5)式得

$$\begin{cases} k_1 \qquad + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 \qquad = 0, \\ \qquad k_2 + k_3 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

齐次线性方程组(6)的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

因此方程组(6)只有零解.即 $k_1=0,k_2=0,k_3=0$.从而向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$,线性无关. ▌

例3 判断下列向量组是线性相关还是线性无关?如果线性相关,试找出其中一个向量,使得它可以由其余向量线性表出,并且写出它的一种表出方式.

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}$.

其中 a,b,c,d 各不相同.

解 (1) 考虑齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$. 把它的系数矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 9 & 10\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -6 & -7\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 19\\ 0 & 0 & -13\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

阶梯形矩阵的非零行数目3等于未知量数目,因此齐次解性方程组只有零解. 从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(2) 考虑齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$.

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 5 & 3\\ 4 & -5 & 0 & 3\\ -2 & 0 & -1 & -3\\ 5 & -3 & 2 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{①+③\cdot 1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 4 & -5 & 0 & 3\\ -2 & 0 & -1 & -3\\ 5 & -3 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由于阶梯形矩阵的非零行数目3小于未知量数目4,因此齐次线性方程组有非零解. 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,方程组的一般解公式是

$$\begin{cases}x_1=-2x_4,\\ x_2=-x_4,\\ x_3=x_4,\end{cases}$$

其中 x_4 是自由未知量,令 $x_4=-1$,得一个解是$(2,1,-1,-1)$ 于是有

$$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=0,$$

由上式得出,$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

(3) 由于 a,b,c,d 各不相同,因此以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组成的矩阵 A 的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

例 4 设 3 维向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

线性无关,把每个向量都添上 2 个分量,则得到的 5 维向量组

$$\tilde{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \tilde{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}, \tilde{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}.$$

也线性无关.(称 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的**延伸组**.)

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\Longrightarrow$ 齐次线性方程组

$$x_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{7}$$

只有零解

$\Longrightarrow$ 齐次线性方程组

$$x_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

只有零解(否则,方程组(7) 也有非零解,矛盾)

$\Longrightarrow \tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3$ 线性无关. ▌

用同样的方法可以证明:

如果 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,把每个向量都添上 m 个分量(所

添分量的位置对于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 都一样)，则得到的 $n+m$ 维向量组 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_s$ 也线性无关.

我们把上述 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_s$ 称为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的**延伸组**. 反过来，把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 称为 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_s$ 的**缩短组**. 上述结论可以叙述成：

如果向量组线性无关，则它的延伸组也线性无关. 由此得出：

如果向量组线性相关，则它的缩短组也线性相关.

在本节开头已指出，几何空间中，设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线(即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关)，则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面(即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关). 由此受到启发，我们猜想有下述结论：

命题 1　设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则向量 β 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关.

证明　必要性是显然的. 下面证充分性.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，则有 K 中不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s,l$ 使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+l\beta=0. \tag{9}$$

假如 $l=0$，则 $k_1,\cdots,k_s$ 不全为 0，并且从(9)式得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

于是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关. 这与已知条件矛盾. 因此 $l\neq 0$. 从而由(9)式得

$$\beta=-\frac{k_1}{l}\alpha_1-\cdots-\frac{k_s}{l}\alpha_s.$$ ▌

从命题 1 立即得到

推论 2　设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则向量 β 不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性无关. ▌

命题 1 和推论 2 解决了当向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关时，向量 β 能不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的问题. 此时，若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，则 β 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出；若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性无关，则 β 不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

我们还需要研究当向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关时，向量 β 能不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的问题. 这在下面一节来研究.

习　题　3.2

1. 下述说法对吗？为什么？

(1) "向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，如果有全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则 $\alpha_1,$

$\cdots,\alpha_s$ 线性无关."

(2) "如果有一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0,$$

则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关."

(3) "若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$ 线性相关,则其中每一个向量都可以由其余向量线性表出."

2. 判断下列向量组是线性相关还是线性无关?如果线性相关,试找出其中一个向量,使得它可以由其余向量线性表出,并且写出它的一种表达式.

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\-4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\3\end{pmatrix}$;

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\6\end{pmatrix}$;

(3) $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}7\\-13\\20\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}$;

(4) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\16\end{pmatrix}$.

3. 证明:几何空间中任意 4 个向量都线性相关.

4. 证明:K^n 中,任意 $n+1$ 个向量都线性相关.

5. 证明:如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则向量组 $2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+5\alpha_3,4\alpha_3+3\alpha_1$ 也线性无关.

6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,判断向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 是否线性无关?

7. 证明:如果向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出,则表出方式唯一的充分必要条件是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

8. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,$\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s$. 如果对于某个 $b_i\neq 0$,则用 β 替换 α_i 以后得到的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 也线性无关.

9. 证明:由非零向量组成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$ 线性无关的充分必要条件是:每一个 $\alpha_i(1<i\leqslant s)$ 都不能用它前面的向量线性表出.

10. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,并且

$$\beta_1=a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{1r}\alpha_r,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_r=a_{r1}\alpha_1+\cdots+a_{rr}\alpha_r.$$

证明：$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

11. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是两两不同的数，$r \leqslant n$. 令

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_2^{n-1} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_r = \begin{pmatrix} 1 \\ a_r \\ \vdots \\ a_r^{n-1} \end{pmatrix}.$$

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是线性无关的.

§3　向量组的秩

在上一节最后一段中，我们指出：还需要研究当向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关时，向量 β 能不能由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的问题. 让我们仍从几何空间中受到启发.

几何空间中，设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面，并且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两不共线. 如图3－2所示. 这时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 它的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关. 部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 虽然都线性无关，但它们有区别：对于部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 来说，添上 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 后得到的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 仍线性无关. 而对部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 添上 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 后得到的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 却线性相关. 由此受到启发，我们引出下述概念.

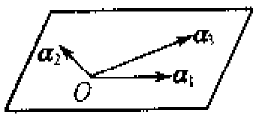


图 3－2

定义 1　K^n 中向量组的一个部分组称为一个**极大线性无关组**，如果这个部分组本身是线性无关的，但是从这个向量组的其余向量（如果还有的话）中任取一个添进去，得到的新的部分组都线性相关.

在上一段讲的几何空间的例子中，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不是极大线性无关组，容易看出，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 以及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也都是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组. 由此看到，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的这些极大

线性无关组所含向量的数目都是2.对于K^n中的任意向量组是否也有类似的结论,即向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的任意两个极大线性无关组所含向量的数目是否一定相等?为了研究这个问题,就要讨论向量组的任意两个极大线性无关组之间的关系.为此我们先一般地讨论两个向量组之间的关系.

定义2　如果向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的每一个向量都可以由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_r$线性表出,则称向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可以由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_r$线性表出.如果向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\cdots,\beta_r$可以互相线性表出,则称向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\cdots,\beta_r$**等价**,记作

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}.$$

向量组的等价是向量组之间的一种关系.容易看出,这种关系具有下述三条性质:

1°　反身性.即任何一个向量组都与自身等价;

2°　对称性.即如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\cdots,\beta_r$等价,则$\beta_1,\cdots,\beta_r$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$等价;

3°　传递性.即如果

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\cdots,\beta_r\},\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}\cong\{\gamma_1,\cdots,\gamma_t\},$$

则$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\gamma_1,\cdots,\gamma_t\}$.

注:容易证明线性表出有传递性,从而等价有传递性.

现在我们来讨论向量组的任意两个极大线性无关组之间的关系.为此先讨论向量组与它的极大线性无关组的关系.

命题1　向量组与它的极大线性无关组等价.

证明　设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_s$.不妨设它的一个极大线性无关组是$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$.对于$i\in\{1,2,\cdots,s\}$,有

$$\alpha_i=0\alpha_1+\cdots+0\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_s,$$

因此$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$可以由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\cdots,\alpha_s$线性表出.

同理,$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$中每一个向量可以由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表出.如果$m<s$,任取$j\in\{m+1,\cdots,s\}$,由极大线性无关组的定义得,$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_j$线性相关.由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关,据本章§2的命题1得,$\alpha_j$可以由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表出.因此$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\cdots,\alpha_s$可以由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表出.

综上述得,$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\cdots,\alpha_s$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$等价.　∎

从命题1和等价的对称性、传递性立即得出:

推论2　向量组的任意两个极大线性无关组等价.　∎

从推论2知道,向量组的任意两个极大线性无关组可以互相线性表出.于

是为了研究它们所含向量的数目是否相等，就需要先研究如果一个向量组可以由另一个向量组线性表出，那么它们所含向量的数目之间有什么关系.

几何空间中，如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，那么能得出什么结论呢？

情形1.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线.如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 一定共面.如图3－3所示.

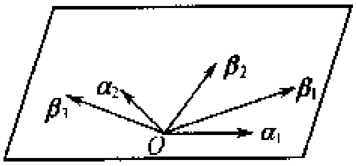


图3－3

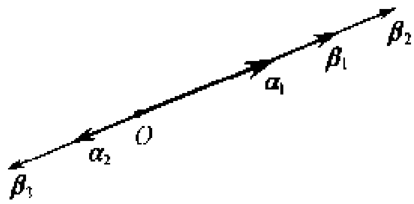


图3－4

情形2.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线.如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 一定共线，当然也共面.如图3－4所示.

由此看出，无论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线还是不共线，只要 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 一定共面(即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关).

从上述例子我们猜想有下述引理1，并且将证明这个猜想是正确的.

引理1　设向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.如果 $r>s$，那么向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性相关.

证明　为了证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性相关，就需要找到一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=0$.为此考虑 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的线性组合

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_r\beta_r.$$

由已知条件，可设

$$\begin{aligned}\beta_1&=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{s1}\alpha_s,\\ \beta_2&=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{s2}\alpha_s,\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \beta_r&=a_{1r}\alpha_1+a_{2r}\alpha_2+\cdots+a_{sr}\alpha_s.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_r\beta_r\\ =\ &x_1(a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{s1}\alpha_s)\\ &+x_2(a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{s2}\alpha_s)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&+x_r(a_{1r}\alpha_1+a_{2r}\alpha_2+\cdots+a_{sr}\alpha_s) \\
=\ &(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r)\alpha_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r)\alpha_2 \\
&+\cdots+(a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sr}x_r)\alpha_s.
\end{aligned} \tag{1}
$$

考虑下述齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=0, \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=0, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sr}x_r=0.
\end{cases} \tag{2}
$$

由已知条件 $s<r$,因此方程组(2) 必有非零解. 取它的一个非零解$(k_1,k_2,\cdots,k_r)$,则从(1) 式和(2) 式得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_s=0.$$

因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性相关. ▌

由引理 1 立即得出:

推论 3 设向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 如果 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关,则 $r\leqslant s$. ▌

从推论 3 得出:

推论 4 等价的线性无关的向量组所含向量的数目相等.

证明 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 等价,并且它们都是线性无关的. 由推论 3 得

$$s\leqslant r, \quad r\leqslant s$$

因此 $s=r$. ▌

从推论 2 和推论 4 立即得出:

推论 5 向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的数目相等.

从推论 5 得出,一个向量组的所有极大线性无关组所含向量的数目相等. 这个数目是相当重要的,为此我们引出下述概念.

定义 3 向量组的极大线性无关组所含向量的数目称为这个**向量组的秩**.

全由零向量组成的向量组的秩规定为零.

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩记作 $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$.

在几何空间中,设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 就是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组,于是 $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=2$.

向量组的秩是一个非常深刻和重要的概念. 例如,我们有下述结论:

命题 6　向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是它的秩等于它所含向量的数目 s.

证明　向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

$\Longleftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组是它自身

$\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\} = s.$ ▌

命题 6 告诉我们，如果 $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\} = s$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关；如果 $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\} < s$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关. 向量组的秩是一个自然数，仅仅凭这一个自然数就可以判定这个向量组是线性无关还是线性相关. 由此看出，向量组的秩是多么深刻的概念！

既然向量组的秩这么重要，我们应当研究向量组的秩的计算方法. 现在我们先给出比较两个向量组的秩的方法. 利用这个方法有时可以从已知的向量组的秩求出另一个向量组的秩. 本章 §5 我们还将给出计算向量组的秩的两种方法. 以后还会陆续给出向量组的秩的计算方法.

命题 7　如果向量组(Ⅰ)可以由向量组(Ⅱ)线性表出，则

(Ⅰ)的秩 $\leqslant$ (Ⅱ)的秩.

证明　设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 分别是向量组(Ⅰ)，(Ⅱ)的一个极大线性无关组，则 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以由(Ⅰ)线性表出，又已知(Ⅰ)可以由(Ⅱ)线性表出，并且(Ⅱ)可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 因此 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 由于 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关，因此 $r \leqslant s$(据推论 3). 即

(Ⅰ)的秩 $\leqslant$ (Ⅱ)的秩. ▌

从命题 7 立即得出：

推论 8　等价的向量组有相同的秩. ▌

现在我们可以给出判断 K^n 中一个向量 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的思路：取向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$. 考虑 β 能不能由 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性表出，若能够表出，则 β 也就能够由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 据本章 §2 的命题 1，需要判断 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r},\beta$ 是否线性相关. 再据本节命题 6，只要去判断 $\operatorname{rank}\{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r},\beta\}$ 是否小于 $r+1$.

习　题　3.3

1. 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2 = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_3 = \begin{pmatrix}7\\-4\\0\end{pmatrix},$$

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组,以及它的秩.

2. 设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}27\\-18\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\5\\8\end{pmatrix},$$

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组,以及它的秩.

3. 证明:秩为 r 的向量组中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组.

4. 证明:K^n 中任一线性无关的向量组所含向量的数目不超过 n.

5. 证明:K^n 中,如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,则任一向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出.

6. 证明:K^n 中,如果任一向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

7. 证明:如果秩为 r 的向量组可以由它的 r 个向量线性表出,则这 r 个向量构成这向量组的一个极大线性无关组.

8. 证明:数域 K 上的 n 个方程的 n 元线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

对任何 $\beta\in K_n$ 都有解的充分必要条件是它的系数行列式 $|A|\neq 0$.

9. 证明:如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 有相同的秩,则 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

10. 证明:$\mathrm{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r\}$
$\leqslant \mathrm{rnak}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}+\mathrm{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$.

§4 子空间的基与维数

在本章 §1 的最后一段,我们指出,判断线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有没有解的问题可以归结为:判断 β 是否属于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 生成的子空间的问题.为此需要研究 K^n 中子空间的结构.

几何空间 $\mathbf{R}^3$ 中,取定三个不共面的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,则空间中任一向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,并且表法唯一.这样几何空间的结构就非常清楚了.我们称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是几何空间的一个基.其次考虑过原点的一个平面 π,在 π 上取定两个不共线的向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$,则 π 上每一个向量都可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 唯一地线性表出,这样平面 π 的结构也很清楚.我们称 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是平面 π 的一个基.注意到三个不共面的向量是线性无关的,两个不共线的向量也是线性无关的.我们容易从几何空间受到启发,把基的概念推广到 K^n 及其子空间上,从而了解它

们的结构.

定义1 设 U 是 K^n 的一个子空间，U 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 如果满足下述两个条件：

1° $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，

2° U 中每一个向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 U 的一个**基**.

K^n 中，由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，并且每一个向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 可以由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 线性表出，即

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

因此 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 K^n 的一个基，称它为 K^n 的**标准基**.

K^n 的任一非零子空间是否都有基？回答是肯定的.

定理1 K^n 的每一个非零子空间 U 都有一个基.

证明 因为 $U\neq 0$，所以 U 中至少有一个非零向量 α_1. 向量组 α_1 是线性无关的. 如果 $\langle\alpha_1\rangle\neq U$，那么 U 中存在 $\alpha_2\notin\langle\alpha_1\rangle$. 于是 α_2 不能由 α_1 线性表出. 据 §2 的推论 2 得，α_1,α_2 线性无关. 如果 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\neq U$，则 U 中存在 $\alpha_3\notin\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$. 同理，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 继续这样做. 从 §3 的推论 3 容易得出，K^n 中任一线性无关的向量组所含向量的数目不会超过 n. 因此上述过程不能无限进行下去. 即当我们得到了 U 中一个线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 以后，有 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle=U$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 就是 U 的一个基. ▌

注：定理 1 的证明过程还表明：从子空间 U 的一个非零向量出发，可以扩充成 U 的一个基.

定理2 K^n 的非零子空间 U 的任意两个基所含向量的数目相等.

证明 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 U 的任意两个基. 由基的定义，它们线性无关，并且可以互相线性表出(从而等价). 因此它们所含向量的数目相等. ▌

定义2 设 U 是 K^n 的一个非零子空间，U 的一个基所含向量的数目称为 U 的**维数**，记作 $\dim_K U$，或者简记作 $\dim U$.

零子空间的维数规定为 0.

由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 K^n 的一个基，因此 $\dim K^n = n$. 这就是为什么我们把 K^n 称为 n 维向量空间的原因.

几何空间中，任意三个不共面的向量是它的一个基，因此几何空间是 3 维的空间. 对于过原点的一个平面 π，它上面不共线的两个向量是 π 的一个基，因此过原点的平面 π 是 2 维的子空间. 对于过原点的一条直线 L，它的一个方向

向量是 L 的一个基,因此过原点的直线 L 是1维的子空间.

基和维数对于决定子空间的结构都起了十分重要的作用.

命题3 设 U 是 K^n 的一个非零子空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 U 的一个基,那么 U 中每一个向量 α 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出,并且表出方式是唯一的.

证明 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 U 的一个基,因此 U 中任一向量 α 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.假如表出方式有两种:

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r,$$

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_r\alpha_r.$$

把上面两个式子相减得

$$(a_1 - b_1)\alpha_1 + (a_2 - b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_r - b_r)\alpha_r = 0. \tag{1}$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,因此从(1)式得出

$$a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \cdots, a_r - b_r = 0.$$

从而 α 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出的方式唯一. ▌

U 中向量 α 由 U 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出的系数组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 称为 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的**坐标**.

命题4 设 U 是 K^n 的 r 维子空间,则 U 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

证明 在 U 中任取 $r+1$ 个向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r+1}$.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 U 的一个基,则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r+1}$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.由于 $r+1>r$,因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r+1}$ 线性相关(据 §3 的引理 1). ▌

命题5 设 U 是 K^n 的 r 维子空间,则 U 中任意 r 个线性无关的向量是 U 的一个基.

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 U 中线性无关的向量组.任取 $\beta\in U$.据命题4得,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 必线性相关.从而 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 U 的一个基. ▌

命题6 设 U 和 W 是 K^n 的两个非零子空间,如果 $U\subseteq W$,则

$$\dim U \leqslant \dim W.$$

证明 在 U 中取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$;在 W 中取一个基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$.因为 $U\subseteq W$,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出.从而 $r\leqslant t$(据 §3 的推论 3).即 $\dim U\leqslant \dim W$. ▌

命题7 设 U 和 W 是 K^n 的两个非零子空间,且 $U\subseteq W$,如果

$$\dim U = \dim W,$$

则 $U = W$.

证明 U 中取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$.由于 $U\subseteq W$,因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 W

中 r 个线性无关的向量. 又由于 $\dim W = \dim U = r$,因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 W 的一个基. 从而 W 中任一向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出. 于是 $\beta\in U$. 因此 $W\subseteq U$. 从而 $W=U$. ∎

设 $U=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$,设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组. 由线性表出的传递性得,U 中任一向量 β 可由 $\alpha_{i_1},_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出. 因此 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 U 的一个基. 这证明了:

定理 8 K^n 中,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组是由这个向量组生成的子空间 $U=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$ 的一个基,从而

$$\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle=\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}. \tag{2}$$ ∎

定理 8 告诉我们,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩等于由它生成的子空间的维数.

数域 K 上 $s\times n$ 矩阵 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 生成的子空间称为 A 的**列空间**;A 的行向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 生成的子空间称为 A 的**行空间**. 由上述得,A 的列空间的维数等于列向量组的秩,A 的行空间的维数等于行向量组的秩. 如何计算它们?这在下一节来专门研究.

例 1 设 $r<n$. 在 K^n 中,令

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)'\mid x_i\in K,i=1,2,\cdots,r\}.$$

说明 W 是 K^n 的一个于空间,并且求 W 的一个基和维数.

解 显然 $0\in W$. 容易看出 W 对于加法,数量乘法都封闭,因此 W 是 K^n 的一个子空间.

W 中任一向量 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)'$ 可以表成

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_r\varepsilon_r,$$

并且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 线性无关,因此 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 是 W 的一个基,从而

$$\dim W=r.$$

习 题 3.4

1. 找出 K^4 的两个基,并且求向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4)'$ 分别在这两个基下的坐标.

2. 证明:K^n 中的向量组

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\eta_n=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

是 K^n 的一个基.

3. 判断下述向量组是否为 K^3 的一个基:

(1) $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\3\\4\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$.

4. 设 U 是K^n 的一个 r 维子空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 U 中 r 个向量. 证明:如果 U 中每一个向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 U 的一个基.

5. 设 U 是K^n 的一个非零子空间,证明:U 中任一线性无关的向量组可以扩充成 U 的一个基.

§5 矩阵的秩

为了求向量组的秩,我们来考虑矩阵. 我们把矩阵的列向量组的秩称为**列秩**,行向量组的秩称为**行秩**. 矩阵的列(行) 秩也就是这个矩阵的列(行) 空间的维数. 如果我们能求出矩阵的列秩(或行秩),那么我们也就会求向量组的秩. 让我们先看一个特殊情形.

设 J 是一个 4×5 阶梯形矩阵:

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $a_1b_2c_3 \neq 0$,于是 a_1,b_2,c_3 是 J 的主元.

把 J 的列向量组记作 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$;行向量组记作 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$.

先求 J 的列秩. 由于

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 \neq 0, \tag{2}$$

因此向量组

$$\begin{pmatrix}a_1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

线性无关.从而它的延伸组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也线性无关.于是 $\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=3$.设

$$W=\{(x_1,x_2,x_3,0)'\mid x_i\in K,i=1,2,3\},$$

据 §4 的例 1 知,$\dim W=3$.显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\in W$,因此有

$$\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle\subseteq\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle\subseteq W \tag{3}$$

从而有

$$3=\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle\leqslant\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle\leqslant\dim W=3.$$

由此得出,$\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle=3$.即 J 的列秩为 3,并且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是$\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$ 的一个基,于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组.

再求 J 的行秩.从(2)式又可得出,向量组

$$(a_1,b_1,c_1),(0,b_2,c_2),(0,0,c_3)$$

线性无关,从而它的延伸组 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 也线性无关.由于 $\gamma_4=0$,因此 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 的一个极大线性无关组.从而 J 的行秩为 3.

从(2)式看到,J 有一个 3 阶子式不等于零.由于 J 只有 3 个非零行,因此 J 的任意 4 阶子式都等于零.从而 J 的不等于零的子式的最高阶数为 3.

以上表明,4×5 阶梯形矩阵 J 的列秩等于行秩,而且等于 J 的不为零的子式的最高阶数.它们都等于 J 的非零行数目 3.J 的主元 a_1,b_2,c_3 所在的列 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正好是 J 的列向量组的一个极大线性无关组.

与上述一样的方法可以证明对于任意阶梯形矩阵 J 都有这些结论.即

定理 1 阶梯形矩阵 J 的行秩与列秩相等,它们都等于 J 的非零行数目;并且 J 的主元所在的列构成列向量组的一个极大线性无关组.

一般的矩阵,其行秩与列秩是否相等?它的列向量的一个极大线性无关组如何求?由于任何一个矩阵都可以通过一系列初等行变换化成阶梯形矩阵,因此解决此问题的思路自然是去研究矩阵的初等行变换会不会改变矩阵的行秩?会不会改变矩阵的列秩?

定理 2 矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩.

证明 设矩阵 A 的行向量组是 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$.设 A 经过 1° 型初等行变换 ⓙ+ ⓘ·k 变成矩阵 B,则 B 的行向量组是 $\gamma_1,\cdots,\gamma_i,\cdots,k\gamma_i+\gamma_j,\cdots,\gamma_s$.显然,$\gamma_1,\cdots,\gamma_i,\cdots,k\gamma_i+\gamma_j,\cdots,\gamma_s$ 可以由 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 线性表出.由于 $\gamma_j=1\cdot(k\gamma_i+\gamma_j)-k\gamma_i$,因此 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 也可以由 $\gamma_1,\cdots,\gamma_i,\cdots,k\gamma_i+\gamma_j,\cdots,\gamma_s$ 线性表出.于是它们等价.而等价的向量组有相同的秩,因此 A 的行秩等于 B 的行秩.

容易证明 2° 型和 3° 型初等行变换使所得矩阵的行向量组与原矩阵的行向量组等价，从而不改变矩阵的行秩. ▮

定理 3 矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性，从而不改变矩阵的列秩. 即

(1) 设矩阵 C 经过初等行变换变成矩阵 D，则 C 的列向量组线性相关当且仅当 D 的列向量组线性相关；

(2) 设矩阵 A 经过初等行变换变成矩阵 B，并且设 B 的第 $j_1,\cdots,j_r$ 列构成 B 的列向量组的一个极大线性无关组，则 A 的第 $j_1,\cdots,j_r$ 列构成 A 的列向量组的一个极大线性无关组；从而 A 的列秩等于 B 的列秩.

证明 (1) 设 C 的列向量组是 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$；$D$ 的列向量组是 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$，则齐次线性方程组

$$x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_n\eta_n=0$$

的系数矩阵为 C；齐次线性方程组 $x_1\delta_1+x_2\delta_2+\cdots+x_n\delta_n=0$ 的系数矩阵为 D. 由于 C 经过初等行变换变成 D，因此上述两个方程组同解. 从而

$$\begin{aligned}&\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\text{ 线性相关}\\ \Longleftrightarrow\ & x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_n\eta_n=0\text{ 有非零解}\\ \Longleftrightarrow\ & x_1\delta_1+x_2\delta_2+\cdots+x_n\delta_n=0\text{ 有非零解}\\ \Longleftrightarrow\ & \delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\text{ 线性相关.}\end{aligned}$$

(2) 当 A 经过一系列初等行变换变成 B 时，A 的第 $j_1,\cdots,j_r$ 列组成的矩阵 A_1 变成了 B 的 $j_1,\cdots,j_r$ 列组成的矩阵 B_1. 由已知条件，B_1 的列向量组线性无关，于是据(1) 的结论得，A_1 的列向量组也线性无关. 在 A 的其余列中任取一列，譬如说第 l 列. 在上述初等行变换下，A 的第 $j_1,\cdots,j_r,l$ 列组成的矩阵 A_2 变成了 B 的第 $j_1,\cdots,j_r,l$ 列组成的矩阵 B_2. 由已知条件得，B_2 的列向量组线性相关，于是据(1) 的结论得，A_2 的列向量组也线性相关. 因此 A 的第 $j_1,\cdots,j_r$ 列构成 A 的列向量组的一个极大线性无关组. 从而 A 的列秩 $=r=B$ 的列秩. ▮

定理 4 任一矩阵的行秩等于它的列秩.

证明 任取矩阵 A，把它经过初等行变换化成阶梯形矩阵 J. 据定理 2、定理 1 和定理 3 得出：

A 的行秩 $=J$ 的行秩 $=J$ 的列秩 $=A$ 的列秩. ▮

定义 1 矩阵 A 的行秩与列秩统称为 A 的**秩**，记作 $\mathrm{rank}(A)$.

从定义 1 和定理 3、定理 1 立即得出：

推论 5 设矩阵 A 经过初等行变换化成阶梯形矩阵 J，则 A 的秩等于 J 的

非零行的数目.设 J 的主元所在的列是第 $j_1,\cdots,j_r$ 列,则 A 的第 $j_1,\cdots,j_r$ 列构成 A 的列向量组的一个极大线性无关组. ▌

推论 5 给出了同时求出矩阵 A 的秩和它的列向量组的一个极大线性无关组的方法.这个方法也可以用来求向量组的秩和它的一个极大线性无关组,只要把每个向量写成列向量,并且组成一个矩阵.这个方法也可以用来求向量组生成的子空间的维数和一个基.

例 1 设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\\-2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\9\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\3\\4\\-5\end{pmatrix},$$

求这个向量组的秩和它的一个极大线性无关组.

解 作初等行变换,把下述矩阵化成阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix}-1&4&2&0\\5&1&0&3\\3&-2&-1&4\\-2&9&4&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&4&2&0\\0&1&0&-5\\0&0&5&54\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是 $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=3$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组.

推论 6 $\operatorname{rank}(A')=\operatorname{rank}(A)$.

证明 由于 A' 的行(列)向量组是 A 的列(行)向量组,因此 $\operatorname{rank}(A')=A'$ 的行秩 $=A$ 的列秩 $=\operatorname{rank}(A)$. ▌

推论 7 矩阵的初等列变换不改变矩阵的秩.

证明 设矩阵 A 经过初等列变换变成矩阵 B.由于一个矩阵的第 j 列是它的转置矩阵的第 j 行,因此 A' 经过相应的初等行变换变成 B'.于是据定理 2 和推论 6 得

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A')=\operatorname{rank}(B')=\operatorname{rank}(B).$$ ▌

既然矩阵的初等行变换与初等列变换都不改变矩阵的秩,因此如果只需要求矩阵 A 的秩,而不需要求 A 的列向量组的极大线性无关组时,可以对 A 既作初等行变换,又作初等列变换,化成阶梯形矩阵.

定理 8 任一非零矩阵的秩等于它的不为零的子式的最高阶数.

证明 设 $s\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,则 A 的行向量组中有 r 个向量线性无关.设 A 的第 $i_1,\cdots,i_r$ 行线性无关,它们组成一个矩阵 A_1(称 A_1 是 A 的子矩阵).由于 A_1 的行向量组线性无关.因此 A_1 的行秩为 r.从而 A_1 的列秩也为

r. 于是 A_1 有 r 列线性无关. 设 A_1 的第 $j_1,\cdots,j_r$ 列线性无关,它们组成 A_1 的一个子矩阵 A_2. 由于 r 级方阵 A_2 的列向量组线性无关,因此 $|A_2|\neq 0$. 即 A 有一个 r 阶子式 $|A_2|\neq 0$.

设 $m>r$,并且 $m\leqslant\min\{s,n\}$. 任取 A 的一个 m 阶子式

$$A\begin{pmatrix}k_1 & k_2, & \cdots, & k_m\\ l_1, & l_2 & \cdots, & l_m\end{pmatrix}.$$

设 A 的列向量组的一个极大线性无关组为 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$,则 A 的第 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 列可以由 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性表出. 由于 $m>r$,因此 A 的第 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 列线性相关(据 §3 的引理 1). 由于

$$A\begin{pmatrix}k_1 & k_2, & \cdots, & k_m\\ l_1, & l_2 & \cdots, & l_m\end{pmatrix}$$

的列向量组是 A 的第 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 列的缩短组,从而也线性相关. 于是

$$A\begin{pmatrix}k_1 & k_2, & \cdots, & k_m\\ l_1, & l_2 & \cdots, & l_m\end{pmatrix}=0.$$

综上述得,A 的不等于零的子式的最高阶数为 r. ▌

定理 4 和定理 8 告诉我们,任一非零矩阵 A 的行秩等于列秩,并且等于 A 的不为零的子式的最高阶数. 由此看出,矩阵的秩是一个非常深刻的概念. 对于数域 K 上任一 $s\times n$ 矩阵 A 来说,A 的行秩等于行空间的维数,A 的列秩等于列空间的维数. 秩的概念说明,A 的行空间的维数等于 A 的列空间的维数. 注意 A 的行空间是 K^n 的一个子空间,而 A 的列空间是 K^s 的一个子空间,它们的维数竟然一样!而且还等于 A 的不为零的子式的最高阶数,真是奇妙!

推论 9 一个 n 级矩阵 A 的秩等于 n 当且仅当 $|A|\neq 0$.

证明 n 级矩阵 A 的秩等于 n

$\Longleftrightarrow A$ 的不等于零的子式的最高阶数为 n

$\Longleftrightarrow |A|\neq 0.$ ▌

一个方阵的秩如果等于它的级数,则称它为**满秩矩阵**. 从推论 9 立即得出,方阵 A 为满秩矩阵当且仅当 $|A|\neq 0$.

定理 8 还给出了求矩阵的秩的另一种方法,即去求不等于零的子式的最高阶数. 利用最高阶的不等于零的子式,还可以求出矩阵的列(行)向量组的一个极大线性无关组. 即

推论 10 设 $s\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,则 A 的不等于零的 r 阶子式所在的列(行)构成 A 的列(行)向量组的一个极大线性无关组.

证明 设 A 的秩为 r,且

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2, & \cdots, & i_r \\ j_1, & j_2 & \cdots, & j_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

于是这个 r 阶子式的列向量组线性无关.从而它的延伸组,即 A 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列线性无关.由于 A 的列秩为 r,因此 A 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列构成 A 的列向量组的一个极大线性无关组.

类似地可证明关于 A 的行向量的极大线性无关组的结论.

例 2　设 $s\times n$ 矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & \cdots & a^{2(n-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a^s & a^{2s} & \cdots & a^{s(n-1)} \end{pmatrix},$$

其中 $s\leqslant n$,且当 $0<r<n$ 时,$a^r\neq 1$.求 A 的秩和它的列向量组的一个极大线性无关组.

解　A 的前 s 列组成的 s 阶子式为范德蒙行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{s-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & \cdots & a^{2(s-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a^s & a^{2s} & \cdots & a^{s(s-1)} \end{vmatrix}.$$

由于当 $0<r<n$ 时,$a^r\neq 1$,因此 $a,a^2,\cdots,a^s$ 两两不同.从而 $D\neq 0$.于是

$$\operatorname{rank}(A)\geqslant s.$$

又由于 A 的行数为 s,因此 $\operatorname{rank}(A)\leqslant s$.从而

$$\operatorname{rank}(A)=s.$$

据推论 10,s 阶子式 D 所在的列,即 A 的前 s 列构成 A 的列向量组的一个极大线性无关组.

像例 2 这样,先求出矩阵 A 的一个 s 阶子式不等于 0,从而 $\operatorname{rank}(A)\geqslant s$;然后利用 A 的秩不超过它的行(列)数,得出 $\operatorname{rank}(A)\leqslant s$,这样一夹逼就求出了 $\operatorname{rank}(A)=s$.这种求矩阵的秩的方法是常用的.

习　题　3.5

1. 计算下列矩阵的秩,并且求出它的列向量组的一个极大线性无关组:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -10 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 求下列向量组的秩以及它的一个极大线性无关组：

(1) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$；

(2) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；

(3) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. 求下述矩阵 A 的列空间的一个基和行空间的维数：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

4. 对于 λ 的不同的值，下述矩阵的秩分别是多少？

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 证明：矩阵的任意一个子矩阵的秩不会超过这个矩阵的秩.

6. 求下述复数域上矩阵 A 的秩以及它的列向量组的一个极大线性无关组：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i^{m} & i^{2m} & i^{3m} & i^{4m} \\ 1 & i^{m+1} & i^{2(m+1)} & i^{3(m+1)} & i^{4(m+1)} \\ 1 & i^{m+2} & i^{2(m+2)} & i^{3(m+2)} & i^{4(m+2)} \\ 1 & i^{m+3} & i^{2(m+3)} & i^{3(m+3)} & i^{4(m+3)} \end{pmatrix},$$

其中 $i = \sqrt{-1}$，m 是正整数.

7. 求下述复数域上矩阵 A 的秩以及它的列向量组的一个极大线性无关组，其中 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$m$ 是正整数.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega^{m} & \omega^{2m} & \omega^{3m} & \omega^{4m} \\ 1 & \omega^{m+1} & \omega^{2(m+1)} & \omega^{3(m+1)} & \omega^{4(m+1)} \\ 1 & \omega^{m+2} & \omega^{2(m+2)} & \omega^{3(m+2)} & \omega^{4(m+2)} \end{pmatrix}.$$

8. 证明:如果 $m\times n$ 矩阵A 的秩为r,则它的任何s行组成的子矩阵A_1的秩不小于 $r+s-m$.

*9. 证明:如果一个 n 级矩阵至少有n^2-n+1个元素为0,则这个矩阵不是满秩矩阵.

*10. 如果一个 n 级矩阵至少有n^2-n+1个元素为0,那么这个矩阵的秩最多是多少?你能写出具有最大秩的矩阵吗?

*11. 设 $A=(a_{ij})$ 为实数域上的 n 级矩阵,证明:

(1) 如果 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$,则 $|A|\neq 0$;

(2) 如果 $a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$,则 $|A|>0$.

§6 线性方程组有解的充分必要条件

现在我们可以来回答直接用线性方程组的系数和常数项判断方程组有没有解,有多少解的问题.

定理1(线性方程组有解判别定理) 线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta \tag{1}$$

有解的充分必要条件是:它的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩.

证明 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解

$\Longleftrightarrow \beta\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$

$\Longleftrightarrow \langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\rangle\subseteq\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$

$\Longleftrightarrow \langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$

$\overset{*}{\Longleftrightarrow} \dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\rangle=\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$

$\Longleftrightarrow$ 它的增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩.

在"*"这一步的充分性利用了本章 §4 的命题7. ∎

从定理1看出,判断线性方程组有没有解,只要去比较它的系数矩阵与增广矩阵的秩是否相等,这比第一章给出的判别方法要优越得多.首先,求矩阵的秩有多种方法,不一定要化成阶梯形矩阵.其次,有时不用求出系数矩阵的秩和增广矩阵的秩,也能比较它们的秩是否相等.由于系数矩阵 A 是增广矩阵$\tilde{A}$ 的子矩阵,因此 $\mathrm{rank}(A)\leqslant\mathrm{rank}(\tilde{A})$.如果还能证明 $\mathrm{rank}(\tilde{A})\leqslant\mathrm{rank}(A)$,那么就得出 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\tilde{A})$.

例1 判断下述复数域上的线性方程组有没有解?

$$\begin{cases} x_1 + \omega^m x_2 + \omega^{2m} x_3 + \omega^{3m} x_4 = b_1, \\ x_1 + \omega^{m+1} x_2 + \omega^{2(m+1)} x_3 + \omega^{3(m+1)} x_4 = b_2, \\ x_1 + \omega^{m+2} x_2 + \omega^{2(m+2)} x_3 + \omega^{3(m+2)} x_4 = b_3, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$m$ 是正整数.

解 线性方程组(2)的增广矩阵 $\tilde{A}$ 的前 3 列组成的 3 阶子式为范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^m & \omega^{2m} \\ 1 & \omega^{m+1} & \omega^{2(m+1)} \\ 1 & \omega^{m+2} & \omega^{2(m+2)} \end{vmatrix}.$$

由于 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，因此 $\omega^m, \omega^{m+1}, \omega^{m+2}$ 两两不同. 从而此行列式不等于 0.

因此，$\mathrm{rank}(\tilde{A}) \geqslant 3$，又 $\tilde{A}$ 只有 3 行，因此 $\mathrm{rank}(\tilde{A}) \leqslant 3$. 从而 $\mathrm{rank}(\tilde{A}) = 3$.

上述行列式也是方程组(3)的系数矩阵 A 的一个 3 阶子式，因此 $\mathrm{rank}(A) \geqslant 3$. 从而 $\mathrm{rank}(A) = 3 = \mathrm{rank}(\tilde{A})$. 于是线性方程组(3)有解.

线性方程组(1)有解时，能不能用系数矩阵的秩去判别它有唯一解，还是有无穷多个解？

定理 2 线性方程组(1)有解时，如果它的系数矩阵 A 的秩等于未知量的数目 n，则方程组(1)有唯一解；如果 A 的秩小于 n，则方程组(1)有无穷多个解.

证明 把线性方程组(1)的增广矩阵 $\tilde{A}$ 经过初等行变换化成阶梯形矩阵 $\tilde{J}$，此时系数矩阵 A 化成了阶梯形矩阵 J，它比 $\tilde{J}$ 少最后一列. 由于方程组(1)有解，因此阶梯形方程组不会出现"$0 = d$(其中 $d \neq 0$)"这种方程. 从而 J 与 $\tilde{J}$ 的非零行数目一样. 而 J 的非零行数目等于 A 的秩. 于是当 A 的秩(即 $\tilde{J}$ 的非零行数目)等于未知量数目 n 时，方程组(1)有唯一解；当 A 的秩小于 n 时，方程组(1)有无穷多个解. ▌

把定理 2 应用到齐次线性方程组上，便得出：

推论 3 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是：它的系数矩阵的秩小于未知量的数目. ▌

例 2 在例 1 中给出的线性方程组(2)有多少解？

解 例 1 中已指出方程组(2)有解. 由于方程组(2)的系数矩阵 A 的秩是 3，它小于未知量数目 4，因此方程组(2)有无穷多个解.

例 3 判断下述齐次线性方程组有没有非零解？

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\
ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\
a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0, \\
a^3x_1 + b^3x_2 + c^3x_3 = 0,
\end{cases}
\tag{3}
$$

其中 a,b,c 两两不同.

解 齐次线性方程组(3)的系数矩阵 A 的前3行组成的3阶子式是范德蒙行列式:

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
a & b & c \\
a^2 & b^2 & c^2
\end{vmatrix}.
$$

由于 a,b,c 两两不同,因此这个行列式不等于零.从而 $\mathrm{rank}(A) \geqslant 3$.又由于 A 只有3列,因此 $\mathrm{rank}(A) \leqslant 3$.由此得出,$\mathrm{rank}(A) = 3$,它等于未知量的数目.因此齐次线性方程组(3)只有零解.

习 题 3.6

1. 判断下述复数域上的线性方程组有没有解?有多少解?

$$
\begin{cases}
x_1 + \mathrm{i}^m x_2 + \mathrm{i}^{2m} x_3 + \mathrm{i}^{3m} x_4 = b_1, \\
x_1 + \mathrm{i}^{m+1} x_2 + \mathrm{i}^{2(m+1)} x_3 + \mathrm{i}^{3(m+1)} x_4 = b_2, \\
x_1 + \mathrm{i}^{m+2} x_2 + \mathrm{i}^{2(m+2)} x_3 + \mathrm{i}^{3(m+2)} x_4 = b_3, \\
x_1 + \mathrm{i}^{m+3} x_2 + \mathrm{i}^{2(m+3)} x_3 + \mathrm{i}^{3(m+3)} x_4 = b_4,
\end{cases}
$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$,m 是正整数.

2. 判断下述线性方程组有没有解?有多少解?

$$
\begin{cases}
x_1 + ax_2 + a^2x_3 + \cdots + a^{n-1}x_n = b_1, \\
x_1 + a^2x_2 + a^4x_3 + \cdots + a^{2(n-1)}x_n = b_2, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
x_1 + a^sx_2 + a^{2s}x_3 + \cdots + a^{s(n-1)}x_n = b_s,
\end{cases}
$$

其中 $s < n$,且当 $0 < r < s$ 时,$a^r \neq 1$.

3. 判断下述线性方程组有没有解?

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\
ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \\
a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = d^2, \\
a^3x_1 + b^3x_2 + c^3x_3 = d^3,
\end{cases}
$$

其中 a,b,c,d 两两不同.

4. 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的秩等于下述矩阵 B 的秩：

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix},$$

证明上述线性方程组有解.

§7 齐次线性方程组的解集的结构

数域 K 上 n 元齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \tag{1}$$

的一个解是数域 K 上一个 n 元有序数组，从而它是 K^n 中一个向量，称它为方程组(1) 的一个**解向量**. 因此齐次线性方程组(1) 的**解集** W 是 K^n 的一个非空子集. 当方程组(1) 有非零解时，它就有无穷多个解，这无穷多个解之间有什么关系呢？即方程组(1) 的解集 W 的结构如何？这就是本节要讨论的问题.

让我们从几何空间中受到启发. 实数域 R 上一个 3 元齐次线性方程表示过原点的一个平面，因此 3 元齐次线性方程组的解集 W 或者是过原点的一条直线，或者是过原点的一个平面，或者是原点(即零向量). 如果 W 是过原点的一条直线 l，则 W 中每个向量可以由 l 的一个方向向量线性表出. 如果 W 是过原点的一个平面 π，则 W 中每个向量可以由平面 π 上两个不共线的向量线性表出. 这表明解集 W 中无穷多个向量可以用 W 中一个或两个向量线性表出.

一般地，当数域 K 上 n 元齐次线性方程组有非零解时，它的解集 W 中无穷多个向量能不能用 W 中有限多个向量线性表出？这首先需要研究齐次线性方程组的解的性质.

性质 1 齐次线性方程组(1) 的任意两个解的和还是方程组(1) 的解. 即如果 $\gamma,\delta \in W$，则 $\gamma + \delta \in W$.

证明 任取齐次线性方程组(1)的两个解:

$$\gamma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)',\delta=(d_1,d_2,\cdots,d_n)',$$

则

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=0,$$
$$d_1\alpha_1+d_2\alpha_2+\cdots+d_n\alpha_n=0.$$

将上面两个式子相加得

$$(c_1+d_1)\alpha_1+(c_2+d_2)\alpha_2+\cdots+(c_n+d_n)\alpha_n=0.$$

这表明

$$\gamma+\delta=(c_1+d_1,c_2+d_2,\cdots,c_n+d_n)'$$

是齐次线性方程组(1)的一个解. ▌

性质 2 齐次线性方程组(1)的任意一个解的倍数还是方程组(1)的一个解.即如果 $\gamma\in W,k\in K$,则 $k\gamma\in W$.

证明 设 $\gamma\in W$,则

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=0.$$

从而
$$(kc_1)\alpha_1+(kc_2)\alpha_2+\cdots+(kc_n)\alpha_n=0.$$

因此
$$k\gamma\in W.$$ ▌

性质1、2表明,n 元齐次线性方程组(1)的解集 W 是K^n 的一个子空间.我们称它为齐次线性方程组(1)的**解空间**.如果方程组(1)只有零解,则 W 是零子空间.如果方程组(1)有非零解,则 W 是非零子空间,从而 W 有基.我们把解空间 W 的一个基称为齐次线性方程组(1)的一个**基础解系**.即

定义 1 齐次线性方程组(1)有非零解时,如果它的有限多个解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 满足:

1° $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关;

2° 方程组(1)的每一个解都可以由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出,

则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组(1)的一个**基础解系**.

如果我们找到了齐次线性方程组(1)的一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$,那么方程组(1)的解集 W 为

$$W=\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t\,|\,k_i\in K,i=1,2,\cdots,t\}.$$

解集 W 的代表元素

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t,\quad(k_1,k_2,\cdots,k_t\in K)$$

称为齐次线性方程组(1)的**通解**.

如何找出齐次线性方程组(1)的一个基础解系?解空间 W 的维数是多少?下面的定理1及其证明过程回答了这两个问题.

定理 1 数域 K 上 n 元齐次线性方程组的解空间 W 的维数为

$$\dim W = n - \operatorname{rank}(A), \tag{2}$$

其中 A 是方程组的系数矩阵.从而当齐次线性方程组(1)有非零解时,它的每一个基础解系所含解向量的数目都等于 $n - \operatorname{rank}(A)$.

证明 如果 n 元齐次线性方程组(1)只有零解,则它的系数矩阵 A 的秩等于 n.于是 $n - \operatorname{rank}(A) = 0$.此时解空间 $W = 0$,从而 $\dim W = 0$.因此(2)式成立.

下面设 n 元齐次线性方程组(1)有非零解,此时 $\operatorname{rank}(A) < n$.设 $\operatorname{rank}(A) = r$.我们来具体找出一个基础解系,就可知道 $\dim W$ 等于多少.

把系数矩阵 A 经过初等行变换化成简化行阶梯形矩阵 J.由于 $\operatorname{rank}(A) = r$,因此 J 有 r 个非零行,从而有 r 个主元.不妨设它们分别在第 $1,2,\cdots,r$ 列.即

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

于是齐次线性方程组(1)的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{1n}x_n, \\ x_2 = -b_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{2n}x_n, \\ \cdots\quad\cdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 是自由未知量.

让自由未知量 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 分别取下述 $n-r$ 组数:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

则得到方程组(1)的 $n-r$ 个解为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \eta_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ -b_{2n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

因为(4)式中的 $n-r$ 个向量线性无关,所以它们的延伸组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 也线性无关.

任取齐次线性方程组(1)的一个解 η:

$$\eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

于是 η 满足方程组(1)的一般解公式(3),即

$$\begin{cases} c_1 = -b_{1,r+1}c_{r+1} - \cdots - b_{1n}c_n, \\ c_2 = -b_{2,r+1}c_{r+1} - \cdots - b_{2n}c_n, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_r = -b_{r,r+1}c_{r+1} - \cdots - b_{rn}c_n. \end{cases}$$

从而解向量 η 可以写成下述形式:

$$\eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1}c_{r+1} & - & \cdots & - & b_{1n}c_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ -b_{r,r+1}c_{r+1} & - & \cdots & - & b_{rn}c_n \\ 1c_{r+1} & + & \cdots & + & 0c_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0c_{r+1} & + & \cdots & + & 1c_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} c_{r+1} + \cdots + \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} c_n$$

$$= c_{r+1}\eta_1 + \cdots + c_n\eta_{n-r}. \tag{6}$$

因此方程组(1)的每一个解 η 可以由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表出.从而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是方程组(1)的一个基础解系.它包含的解向量的数目为 $n-\operatorname{rank}(A)$.因此 $\dim W = n - \operatorname{rank}(A)$. ▌

定理1的证明过程给出了求齐次线性方程组(1)的基础解系的方法.即

第一步.把齐次线性方程组(1)的系数矩阵 A 经过初等行变换化成简化行阶梯形矩阵 J;

第二步.从 J 直接写出方程组(1)的一般解公式;

第三步.在一般解公式中,每一次让一个自由未知量取值1,其余自由未知量取值0,求出方程组(1)的一个解向量.这样得到的 $n-r$ 个解向量就构成方程组(1)的一个基础解系,其中 $r=\operatorname{rank}(A)$.

在定理1的证明过程中,我们让自由未知量 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 分别取(4)式中的 $n-r$ 组数.我们也可以让它们取下述 $n-r$ 组数:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_{n-r} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 $d_1d_2\cdots d_{n-r}\neq 0$.显然(7)式中的 $n-r$ 个向量线性无关.把它们代入一般解公式中,所得到的 $n-r$ 个解向量 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-r}$ 是它们的延伸组,从而 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-r}$ 也线性无关.类似地可证明方程组(1)的每一个解 η 可以由 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-r}$ 线性表出,因此 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-r}$ 也是方程组(1)的一个基础解系.

例1 求下述数域 K 上齐次线性方程组的一个基础解系,并且写出它的解集.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & -10 & 14 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是方程组(8)的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4, \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4, \end{cases} \tag{9}$$

其中 x_3, x_4 是自由未知量. 因此方程组(8)的一个基础解系为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

从而方程组(8)的解集 W 为

$$W = \{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \mid k_1, k_2 \in K\}.$$

习 题 3.7

1. 求下列数域 K 上齐次线性方程组的一个基础解系,并且写出它的解集.

(1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0; \end{cases}$

$$(2)\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ -2x_1 + 15x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 15x_2 - 6x_3 + 13x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 15x_2 + 5x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

2. 证明:设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组(1)的一个基础解系,则与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 等价的线性无关的向量组也是方程组(1)的基础解系.

3. 证明:设 n 元齐次线性方程组(1)的系数矩阵的秩为 $r(r<n)$,则方程组(1)的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量都是它的一个基础解系.

4. 证明:设 n 元齐次线性方程组(1)的系数矩阵的秩为 $r(r<n)$,设 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$ 是方程组(1)的解向量,则 $\operatorname{rank}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}\leqslant n-r$.

5. 设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的行列式等于零,并且 A 的 (k,l) 元的代数余子式 $A_{kl}\neq 0$.证明:

$$\eta_1=\begin{pmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{pmatrix}$$

是这个齐次线性方程组的一个基础解系.

6. 设 $n-1$ 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵为 B,把 B 划去第 j 列得到的 $n-1$ 阶子式记作 D_j,令

$$\eta_1=\begin{pmatrix} D_1 \\ -D_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}D_n \end{pmatrix}$$

证明:(1) η_1 是齐次线性方程组的一个解;

(2) 如果 $\eta_1\neq 0$,则 η_1 是方程组的一个基础解系.

7. 设 A_1 是 $s\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的前 $s-1$ 行组成的子矩阵.证明:如果以 A_1 为系数矩阵的齐次线性方程组的解都是方程 $a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0$ 的解,则 A 的第 s 行

可以由 A 的前 $s-1$ 行线性表出.

§8　非齐次线性方程组的解集的结构

数域 K 上 n 元非齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta \tag{1}$$

的一个解是 K^n 中一个向量,称它为方程组(1)的一个解向量.因此 n 元非齐次线性方程组(1)的解集 U 是 K^n 的一个子集(可能是空集,如果方程组(1)无解的话).当方程组(1)有无穷多个解时,解集 U 的结构如何?这就是本节要讨论的问题.

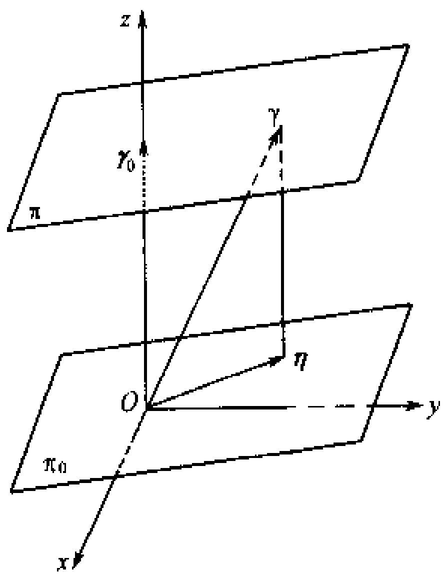


图3-5

让我们仍从几何空间中受到启发.3元非齐次线性方程 $ax+by+cz=d$ 的解集是不过原点的一个平面 π,而相应的齐次线性方程 $ax+by+cz=0$ 的解集是过原点的一个平面 π_0.如图3-5所示.π 可以由 π_0 沿着向量 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 平移得到,其中 $\boldsymbol{\gamma}_0\in\pi$.于是 π 上每一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta},$$

其中 $\boldsymbol{\eta}\in\pi_0$.反之,对于 π_0 上任一向量 $\boldsymbol{\eta}$,都有 $\gamma_0+\boldsymbol{\eta}\in\pi$.因此

$$\pi=\{\gamma_0+\boldsymbol{\eta}\mid\boldsymbol{\eta}\in\pi_0\}.$$

从上述几何空间中的例子受到启发,我们猜想:n 元非齐次线性方程组(1)的解集 U 与相应的齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 的解集

W 有如下关系：

$$U = \{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\},$$

其中 γ_0 是非齐次线性方程组(1) 的一个解.

我们把 n 元齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \tag{2}$$

称为非齐次线性方程组(1) 的**导出组**.

性质 1 n 元非齐次线性方程组(1) 的两个解的差是它的导出组(2) 的一个解.

证明 设

$$\gamma = (c_1, c_2, \cdots, c_n)', \delta = (d_1, d_2, \cdots, d_n)'$$

是方程组(1) 的两个解,则

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = \beta,$$

$$d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \cdots + d_n\alpha_n = \beta.$$

把上面两个式子相减得

$$(c_1 - d_1)\alpha_1 + (c_2 - d_2)\alpha_2 + \cdots + (c_n - d_n)\alpha_n = 0. \tag{3}$$

(3) 式表明：

$$\gamma - \delta = (c_1 - d_1, c_2 - d_2, \cdots, c_n - d_n)'$$

是导出组(2) 的一个解.

性质 2 n 元非齐次线性方程组(1) 的一个解与它的导出组(2) 的一个解之和仍是非齐次线性方程组(1) 的一个解.

证明 设 γ 是方程组(1) 的一个解,设 $\eta = (e_1, e_2, \cdots, e_n)'$ 是导出组(2) 的一个解,则

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = \beta,$$

$$e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + \cdots + e_n\alpha_n = 0.$$

把上面两个式子相加得

$$(c_1 + e_1)\alpha_1 + (c_2 + e_2)\alpha_2 + \cdots + (c_n + e_n)\alpha_n = \beta. \tag{4}$$

(4) 式表明：$\gamma + \eta$ 是非齐次线性方程组(1) 的一个解. ▌

定理 1 如果数域 K 上 n 元非齐次线性方程组(1) 有解,则它的解集 U 为

$$U = \{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\}, \tag{5}$$

其中 γ_0 是非齐次线性方程组(1) 的一个解(称 γ_0 是特解), W 是方程组(1) 的导出组(2) 的解空间.

证明 任取 $\eta \in W$,由性质 2 知, $\gamma_0 + \eta \in U$,因此(5) 式右边的集合包

含于 U. 反之,任取 $\gamma \in U$,据性质1得,$\gamma - \gamma_0 \in W$. 记 $\gamma - \gamma_0 = \eta$,则 $\gamma = \gamma_0 + \eta$. 因此 U 包含于(5)式右边的集合. 从而(5)式成立. ∎

我们把集合 $\{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\}$ 记作 $\gamma_0 + W$.

一般地,如果 W 是 K^n 的一个子空间,$\alpha_0 \in K^n$,令

$$\alpha_0 + W = \{\alpha_0 + \eta \mid \eta \in W\}, \tag{6}$$

则称 $\alpha_0 + W$ 是一个 W 型的**线性流形**(或 W 的一个**陪集**).

由定理1知,n 元非齐次线性方程组(1)有解时,它的解集 U 是一个 W 型的线性流形,其中 W 是它的导出组(2)的解空间.

推论2 如果 n 元非齐次线性方程组(1)有解,则它的解唯一的充分必要条件是它的导出组(2)只有零解.

证明 设非齐次线性方程组(1)有解,则它的解集 U 等于 $\gamma_0 + W$,其中 γ_0 是方程组(1)的一个特解,W 是它的导出组(2)的解空间. 于是

方程组(1)的解唯一 $\Longleftrightarrow \gamma_0 + W = \{\gamma_0\}$

$$\Longleftrightarrow W = \{0\}.$$ ∎

于是当 n 元非齐次线性方程组(1)有无穷多个解时,它的导出组(2)必有非零解. 此时取导出组(2)的一个基础解系 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$,其中 r 是导出组(2)的系数矩阵 A 的秩(A 也是方程组(1)的系数矩阵),则非齐次线性方程组(1)的解集 U 为

$$U = \{\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} \mid k_i \in K, i = 1,2,\cdots,n-r\},$$

其中 γ_0 是非齐次线性方程组(1)的一个特解.

解集 U 的代表元素

$$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}, \quad (k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in K)$$

称为非齐次线性方程组(1)的**通解**.

例1 求下述数域 K 上非齐次线性方程组的解集.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -7, \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -2. \end{cases} \tag{7}$$

解 第一步,求方程组(7)的一个特解 γ_0. 为此先求出它的一般解公式.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & -2 & 4\\0 & -5 & 7 & -3 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5}\\0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

方程组(1) 的一般解为

$$\begin{cases}x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{17}{5},\\ x_2 = \quad \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 - \frac{1}{5},\end{cases} \tag{8}$$

其中 x_3, x_4 是自由未知量. 由(8) 式得到方程组(1) 的一个特解为

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix}\frac{17}{5}\\ -\frac{1}{5}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

第二步　求导出组的一个基础解系. 由于方程组(7) 与它的导出组的系数矩阵相同,因此把方程组(7) 的一般解公式(8) 的常数项去掉,就得到导出组的一般解.

$$\begin{cases}x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4,\\ x_2 = -\frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4,\end{cases}$$

其中 x_3, x_4 是自由未知量. 从而得出导出组的一个基础解系为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix}-4\\7\\5\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2 = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\\5\end{pmatrix}.$$

第三步　写出非齐次线性方程组(7) 的解集:

$$U = \{\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \mid k_1, k_2 \in K\}.$$

习　题　3.8

1. 求下述数域 K 上非齐次线性方程组的解集:

$$(1)\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5, \\ -x_1 - 9x_2 \quad\quad - 4x_4 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 1, \\ -5x_1 - 10x_2 - 2x_3 + x_4 = -21, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -16; \end{cases}$$

(3) $x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 4$.

2. 证明：n 个方程的 n 元非齐次线性方程组有唯一解当且仅当它的导出组只有零解.

3. 证明：如果 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t$ 都是 n 元非齐次线性方程组(1)的解，并且一组数 $u_1, u_2, \cdots, u_t$ 满足

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_t = 1,$$

则 $u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_t\gamma_t$ 也是方程组(1)的一个解.

4. 证明：如果 γ_0 是非齐次线性方程组(1)的一个特解，$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是它的导出组的一个基础解系.令

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \eta_1, \gamma_2 = \gamma_0 + \eta_2, \cdots, \gamma_t = \gamma_0 + \eta_t.$$

则非齐次线性方程组(1)的任意一个解 γ 可以表示成

$$\gamma = u_0\gamma_0 + u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_t\gamma_t,$$

其中 $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_t = 1$.

应用与实验课题：线性方程组在几何中的应用

线性方程组的理论在解析几何中有重要应用.

1. 求三个平面

$$a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0, \quad i = 1,2,3$$

通过一直线但不合并为一个平面的充分必要条件.

2. 判断下述三个平面是否通过一直线但不合并为一个平面：

$$x - 3y + 2z - 1 = 0,$$
$$2x - y - 3z - 4 = 0,$$
$$x + 7y - 12z - 5 = 0.$$

3. 求平面上通过五点 $M_i(x_i, y_i), i = 1,2,3,4,5$ 的二次曲线的方程.

4. 求平面上通过下述五点的二次曲线的方程：

$M_1(0,1), M_2(2,0), M_3(-2,0), M_4(1,-1), M_5(-1,-1)$.

第4章　矩阵的运算

数域 K 上 n 元线性方程组可以用它的增广矩阵来表示.判断它有没有解,只要去比较它的系数矩阵的秩与增广矩阵的秩是否相等.

某公司有三个商场销售电视机,电冰箱,洗衣机,音响.2001年9月份的销售金额可以用一个矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4}$ 分别表示第 i 个商场9月份销售电视机,电冰箱,洗衣机,音响的金额,$i=1,2,3$.

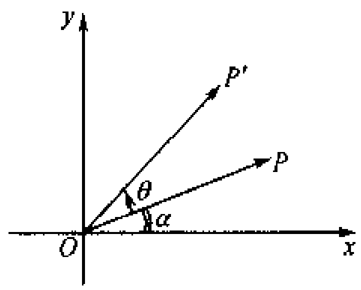


图 4－1

平面上取定一个直角坐标系 Oxy,所有以原点为起点的向量组成的集合记作 V.让 V 中每个向量绕原点 O 旋转角度 θ,如图 4－1 所示.我们来求这个旋转(记作 σ) 的公式,设 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标为 (x,y),它在旋转 σ 下的象 $\overrightarrow{OP'}$ 的坐标为 (x',y').设以 x 轴的正半轴为始边,以射线 OP 为终边的角为 α.设 $|\overrightarrow{OP}|=r$.从三角函数的定义得

$$x=r\cos\alpha,\quad y=r\sin\alpha,$$
$$x'=r\cos(\alpha+\theta),\quad y'=r\sin(\alpha+\theta).$$

由此得出

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta, \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta. \end{cases} \tag{2}$$

(2) 式就是旋转 σ 的公式.把公式(2) 中的系数排成如下一张表:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{3}$$

则矩阵(3)就表示了转角为 θ 的旋转.

设有7个水稻品种 $P_i(i=1,2,\cdots,7)$,想通过种试验田来比较它们的优劣.为了减少(或避免)土壤的肥力不均匀对试验结果的影响,我们选择7块试验田(称为区组),每个区组本身的土壤肥力是均匀的.把每个区组均匀分成3小块,每一小块种一个品种的水稻.为了使每两个品种都能在同一个区组里相遇,以便比较它们的优劣,我们采用下述安排(用 B_i 表示第 i 个区组):

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_1
P_4	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3

我们可以构造一个矩阵 M 来表示上述试验方案.令

$$M(i;j) \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} 1, & \text{当 } P_i \text{ 安排在 } B_j \text{ 里}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{4}$$

即

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

(5)式中的矩阵 M 称为上述试验方案的**关联矩阵**.从关联矩阵 M 不难看出每两个品种恰好相遇在一个区组里.

从上述例子看到,不同领域中的问题都可以用矩阵来表示.进一步问:在第2个例子里,如果某公司三个商场10月份销售四种家电产品的金额也用矩阵表示,那么9、10月份销售金额的和与这两个矩阵有什么关系?在第3个例子里,如果转角为 φ 的旋转 τ 也用矩阵表示,那么相继作旋转 σ 与旋转 τ,它们的总效果如何用 σ 的矩阵与 τ 的矩阵表示?在第4个例子里,如何运用关联矩阵使得更直截了当地看出:每两个品种恰好相遇在一个区组里,以及每个品种

出现在多少个区组里.所有这些问题都要求对矩阵进行运算.这一章我们就来讨论矩阵有哪些运算?这些运算满足哪些运算法则?有哪些性质?

§1 矩阵的运算

在本章开头的第2个例子中,某公司三个商场9月份、10月份销售四种家电产品的金额分别用矩阵 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 表示.则这两个月的销售金额的和可用下述矩阵 C 表示:

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & a_{34}+b_{34} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

从问题的实际意义很自然地把矩阵 C 称为矩阵 A 与 B 的**和**,记作 $C=A+B$.

数域 K 上两个矩阵称为**相等**,如果它们的行数相同,列数也相同,并且它们的所有元素对应相等(即,第1个矩阵的 (i,j) 元等于第2个矩阵的 (i,j) 元).

在上述例子中,如果11月份的销售金额比9月份同步增长10%(即,每个商场11月份销售每种家电产品的金额都比9月份的金额增长10%),则11月份的销售金额可用下述矩阵 M 表示:

$$M=\begin{pmatrix} 1.1a_{11} & 1.1a_{12} & 1.1a_{13} & 1.1a_{14} \\ 1.1a_{21} & 1.1a_{22} & 1.1a_{23} & 1.1a_{24} \\ 1.1a_{31} & 1.1a_{32} & 1.1a_{33} & 1.1a_{34} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

从问题的实际意义很自然地把矩阵 M 称为1.1与矩阵 A 的**数量乘积**,记作 $M=1.1A$.

定义1 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 都是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵,令

$$C=(a_{ij}+b_{ij})_{s\times n}, \tag{3}$$

则称矩阵 C 是矩阵 A 与 B 的**和**,记作

$$C=A+B. \tag{4}$$

设 $k\in K$,令

$$M=(ka_{ij})_{s\times n}, \tag{5}$$

则称矩阵 M 是 k 与矩阵 A 的**数量乘积**,记作

$$M=kA. \tag{6}$$

容易直接验证,矩阵的加法与数量乘法满足下述8条运算法则:对于数域

K 上任意 $s\times n$ 矩阵 A,B,C，以及任意 $k,l\in K$，有

1° $A+B=B+A$（**加法交换律**）；

2° $(A+B)+C=A+(B+C)$（**加法结合律**）；

3° **零矩阵** 0 使得 $A+0=0+A=A$；

4° 设 $A=(a_{ij})$，矩阵 $(-a_{ij})$ 称为 A 的**负矩阵**，记作 $-A$. 有
$$A+(-A)=(-A)+A=0;$$

5° $1A=A$；

6° $(kl)A=k(lA)$；

7° $(k+l)A=kA+lA$；

8° $k(A+B)=kA+kB$.

利用负矩阵的概念，可以定义矩阵的**减法**如下：
$$A-B\xlongequal{\text{def}}A+(-B).\tag{7}$$

在本章开头的第3个例子中，平面上绕原点 O 转角为 θ 的旋转 σ 可以用一个矩阵
$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\tag{8}$$
来表示. 同理，绕原点 O 转角为 φ 的旋转 τ 可以用矩阵
$$B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\tag{9}$$
来表示.

现在相继作旋转 τ 与旋转 σ，其总的效果是作了转角为 $\theta+\varphi$ 的旋转 ψ. 同上理，ψ 可以用矩阵
$$C=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{pmatrix}\tag{10}$$
来表示. 我们把相继作旋转 τ 与 σ 的总效果（旋转 ψ）称为 σ 与 τ 的乘积，即，$\psi=\sigma\tau$. 于是很自然地我们把矩阵 C 称为矩阵 A 与 B 的**乘积**，即，$C=AB$. 现在我们来仔细看一看矩阵 C 的元素与矩阵 A,B 的元素之间有什么关系. 利用两角和的余弦、正弦公式得
$$C=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\end{pmatrix}\tag{11}$$
比较(11)式与(8)、(9)式，可以看出：

$$
\begin{aligned}
C(1;1) &= A(1;1)B(1;1) + A(1;2)B(2;1),\\
C(1;2) &= A(1;1)B(1;2) + A(1;2)B(2;2),\\
C(2;1) &= A(2;1)B(1;1) + A(2;2)B(2;1),\\
C(2;2) &= A(2;1)B(1;2) + A(2;2)B(2;2).
\end{aligned} \tag{12}
$$

即,C 的(1,1)元等于 A 的第1行与 B 的第1列的对应元素的乘积之和;C 的(1,2)元是 A 的第1行与 B 的第2列对应元素的乘积之和;等等.

例如,当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时,

$$
A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},
$$

于是

$$
\begin{aligned}
C = AB &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi & -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi & -\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

从旋转这个例子受到启发,我们给出矩阵的乘法运算的定义.

定义 2 设 $A = (a_{ij})_{s\times n}, B = (b_{ij})_{n\times m}$,令

$$
C = (c_{ij})_{s\times m},
$$

其中

$$
c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \tag{13}
$$

$i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,m$.则矩阵 C 称为矩阵A 与B 的乘积,记作 $C = AB$.

从定义2看出,矩阵的乘法有以下几个要点:

1) 只有左矩阵的列数与右矩阵的行数相同的两个矩阵才能相乘;

2) 乘积矩阵的(i,j)元等于左矩阵的第 i 行与右矩阵的第j 列的对应元素的乘积之和,即

$$
(AB)(i;j) = \sum_{k=1}^{n}[A(i;k)][B(k;j)]; \tag{14}
$$

3）乘积矩阵的行数等于左矩阵的行数，乘积矩阵的列数等于右矩阵的列数.

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&-2\\0&3\\-1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&5\\6&7\end{pmatrix},$$

求 AB.

解

$$AB=\begin{pmatrix}1&-2\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\6&7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times4+(-2)\times6&1\times5+(-2)\times7\\0\times4+3\times6&0\times5+3\times7\\(-1)\times4+2\times6&(-1)\times5+2\times7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&-9\\18&21\\8&9\end{pmatrix}.$$

例2 矩阵 A、B 如同例1所给，设

$$C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

求 BC，$A(BC)$，$(AB)C$.

解

$$BC=\begin{pmatrix}4&5\\6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&4\\-7&6\end{pmatrix},$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}1&-2\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&4\\-7&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8\\-21&18\\-9&8\end{pmatrix},$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}-8&-9\\18&21\\8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8\\-21&18\\-9&8\end{pmatrix}.$$

从例2看出，$A(BC)=(AB)C$. 这对于一般情形下也是正确的. 即

1° **矩阵的乘法适合结合律**：设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，$C=(c_{ij})_{m\times r}$，则

$$(AB)C=A(BC). \tag{15}$$

证明 显然，$(AB)C$ 与 $A(BC)$ 都是 $s\times r$ 矩阵. 由于

$$[(AB)C](i;j)=\sum_{l=1}^{m}[(AB)(i;l)]c_{lj}=\sum_{l=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\Big)c_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right),$$

$$[A(BC)](i;j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[(BC)(k;j)] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{m} b_{kl}c_{lj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right),$$

因此

$$[(AB)C](i;j) = [A(BC)](i;j),$$

$i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,r$.从而

$$(AB)C = A(BC).$$ ▌

从例 1 看到,A 与 B 可以做乘法,但是 B 与 A 不能做乘法.这说明矩阵的乘法不适合交换律.即使 A 与 B 可以做乘法,B 与 A 也可以做乘法,但是也有可能 $AB \neq BA$.可以看下面两个例子:

例 3 设

$$A = (1,1,1), B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

求 AB 与 BA.

解

$$AB = (1,1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3),$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

如果运算的最后结果得到一个 1 级矩阵,那么我们可以把它写成一个数.在例 3 中,可以写 $AB = 3$.

一个行向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可以看成 $1\times n$ 矩阵,一个列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

可以看成 $n\times 1$ 矩阵.

例 4 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

求 AB 与 BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

从例4还可以看到一个奇怪的现象：$B\neq 0, A\neq 0$，但是 $BA=0$. 这一点希望读者要特别注意. 即，从 $BA=0$，不能推出 $B=0$ 或 $A=0$.

一般地，对于矩阵 A，如果存在一个非零矩阵 B 使得 $AB=0$，则称 A 是一个**左零因子**；如果存在一个非零矩阵 C 使得 $CA=0$，则称 A 是一个**右零因子**. 左零因子和右零因子都简称为**零因子**. 显然，零矩阵既是左零因子，又是右零因子，称零矩阵是平凡的零因子. 其余的零因子称为非平凡的.

2° 矩阵的乘法适合**左分配律**：

$$A(B+C)=AB+AC, \tag{16}$$

也适合**右分配律**：

$$(B+C)D=BD+CD. \tag{17}$$

证明方法类似于结合律的证明.

例5　设

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&3\\2&5\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

求 AC 与 BC.

解

$$AC=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\7&7\end{pmatrix},$$

$$BC=\begin{pmatrix}0&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\7&7\end{pmatrix}.$$

从例5看到，$AC=BC$，但是 $A\neq B$，这说明矩阵的乘法不适合消去律. 即，从 $AC=BC$ 且 $C\neq 0$，不能推出 $A=B$.

3° 主对角线上元素都是1，其余元素都是0的 n 级矩阵称为 n 级**单位矩阵**，记作 I_n，或简记作 I，容易直接计算得，

$$I_sA_{s\times n}=A_{s\times n}, A_{s\times n}I_n=A_{s\times n}. \tag{18}$$

特别地，如果 A 是 n 级矩阵，则

$$IA = AI = A. \tag{19}$$

4° 矩阵的乘法与数量乘法满足下述关系式：

$$k(AB) = (kA)B = A(kB). \tag{20}$$

证明 设 $A = (a_{ij})_{s\times n}, B = (b_{ij})_{n\times m}$，显然 $k(AB),(kA)B,A(kB)$ 都是 $s \times m$ 矩阵. 由于

$$[k(AB)](i;j) = k[(AB)(i;j)] = k\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right) = \sum_{l=1}^{n} ka_{il}b_{lj},$$

$$[(kA)B](i;j) = \sum_{l=1}^{n}(kA)(i;l)b_{lj} = \sum_{l=1}^{n} ka_{il}b_{lj},$$

$$[A(kB)](i;j) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}[(kB)(l;j)] = \sum_{l=1}^{n} a_{il}kb_{lj},$$

因此

$$[k(AB)](i;j) = [(kA)B](i;j) = [A(kB)](i;j),$$

$i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,m$. 从而

$$k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

∎

主对角线上元素是同一个数 k，其余元素全为 0 的 n 级矩阵称为**数量矩阵**. 容易看出

$$kI + lI = (k + l)I, \tag{21}$$

$$k(lI) = (kl)I, \tag{22}$$

$$(kI)(lI) = (kl)I. \tag{23}$$

上述三个式子表明：n 级数量矩阵组成的集合对于矩阵的加法、数量乘法与乘法三种运算都封闭.

容易看出

$$(kI)A = kA, A(kI) = kA. \tag{24}$$

(24) 式表明：数量矩阵 kI 乘 A 等于 k 乘 A.

前面已指出，矩阵的乘法不适合交换律. 但是对于具体的两个矩阵 A 与 B，也有可能 $AB = BA$. 如果 $AB = BA$，则称 A 与 B **可交换**. 从 (24) 式得出，如果 A 是 n 级矩阵，则

$$(kI)A = A(kI). \tag{25}$$

即，数量矩阵与任一同级矩阵可交换.

设 A 是一个 n 级矩阵，因为矩阵的乘法适合结合律，所以 $\underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{m个}$ 表示唯一的一个矩阵，把它记作 A^m. 即，我们规定

$$A^m \xlongequal{\text{def}} \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{m个}. \tag{26}$$

我们还规定

$$A^0 \xlongequal{\text{def}} I. \tag{27}$$

容易看出，n 级矩阵的方幂适合下列规则：

$$A^k A^l = A^{k+l}, \tag{28}$$

$$(A^k)^l = A^{kl}, \tag{29}$$

其中 k、l 是任意自然数.

注意：由于矩阵的乘法不适合交换律，因此一般来说，$(AB)^k \neq A^k B^k$. 但是如果 A 与 B 可交换，则 $(AB)^k = A^k B^k$.

根据矩阵乘法的定义，我们可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{30}$$

写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}. \tag{31}$$

用 A 表示线性方程组(30)的系数矩阵，用 X 表示未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的列向量，用 β 表示常数项组成的列向量，则(31)式可以写成

$$AX = \beta. \tag{32}$$

这表明线性方程组有非常简洁的形式(32). 特别地，齐次线性方程组有非常简洁的形式：

$$AX = 0. \tag{33}$$

于是，列向量 η 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解当且仅当 $A\eta = 0$. 这个结论在今后经常用到.

在第三章 §1 中，我们指出，线性方程组(30)可以写成

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta, \tag{34}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是系数矩阵 A 的列向量组. 此时我们把 A 记成

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n). \tag{35}$$

从(32)和(34)式得

$$AX = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n. \tag{36}$$

把(35)式代入(36)式中，得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n. \tag{37}$$

(37)式表明：虽然$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中的每个$\alpha_i$不是一个数，但是我们仍然可以像矩阵乘法的定义那样把$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$与列向量$X$相乘.

一般地，设$s\times n$矩阵$A=(a_{ij})$的列向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，设$n\times m$矩阵$B=(b_{ij})$，则不难看出有下式成立：

$$\begin{aligned}AB&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nm}\end{pmatrix}\\&=(b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n,\cdots,b_{1m}\alpha_1+b_{2m}\alpha_2+\cdots+b_{nm}\alpha_n)\end{aligned} \tag{38}$$

(38)式表明：做矩阵乘法时，可以把左矩阵的列向量组的向量分别与右矩阵的第1列、第2列、…、第m列的对应元素的乘积之和作为乘积矩阵的各列.

类似地，设矩阵B的行向量为$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$.则

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\gamma_1+a_{12}\gamma_2+\cdots+a_{1n}\gamma_n\\a_{21}\gamma_1+a_{22}\gamma_2+\cdots+a_{2n}\gamma_n\\\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\a_{s1}\gamma_1+a_{s2}\gamma_2+\cdots+a_{sn}\gamma_n\end{pmatrix}. \tag{39}$$

(39)式表明：做矩阵乘法时，可以把左矩阵的第1行、第2行、…、第s行的元素分别与右矩阵的行向量组的对应向量的乘积之和作为乘积矩阵的各行.

在例1中，我们计算了AB，现在来计算$(AB)'$，以及$B'A'$.

$$(AB)'=\begin{pmatrix}-8&18&8\\-9&21&9\end{pmatrix},$$

$$B'A'=\begin{pmatrix}4&6\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&18&8\\-9&21&9\end{pmatrix}.$$

由此看出，$(AB)'=B'A'$.

矩阵的加法、数量乘法、乘法三种运算与矩阵的转置的关系如下：

1° $(A+B)'=A'+B'$;

2° $(kA)'=kA'$;

3° $(AB)'=B'A'$.

证明 1°与2°的证明很容易,留给读者.现在进行3°的证明.设 $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$.则$(AB)'$与$B'A'$都是 $m\times s$ 矩阵.由于

$$(AB)'(i;j) = (AB)(j;i) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki},$$

$$(B'A')(i;j) = \sum_{k=1}^{n} B'(i;k)A'(k;j) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk},$$

因此$(AB)'(i;j) = (B'A')(i;j)$, $i = 1,2,\cdots,m$; $j = 1,2,\cdots,s$.
从而$(AB)' = B'A'$. ∎

显然,$(A')' = A$.

习 题 4.1

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $A+B$.

2. 设

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

求$(r-\lambda)I + \lambda J$.

3. 设 I 是 n 级单位矩阵.J 是元素全为1的 n 级矩阵.设

$$M = \begin{pmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{pmatrix}_{n\times n},$$

把 M 表示成 $xI + yJ$ 的形式,其中 x、y 是待定系数.

4. 计算

(1) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(4) $(4,7,9)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;　　(5) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(4,7,9)$;

(6) $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;　　(7) $(1,1,1)\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$;

(8) $\begin{pmatrix}d_1 & 0 & 0\\0 & d_2 & 0\\0 & 0 & d_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$;

(9) $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1 & 0 & 0\\0 & d_2 & 0\\0 & 0 & d_3\end{pmatrix}$;

(10) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\0 & 10 & 11\\0 & 0 & 12\end{pmatrix}$;

(11) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\k & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{pmatrix}$;

(12) $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\k & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

(13) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{pmatrix}$;

(14) $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(15) $\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$.

5. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix},$$

求 $AB,BA,AB-BA$.

6. 计算

$$(x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\a_{12} & a_{22} & a_2\\a_1 & a_2 & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}.$$

7. 计算

(1) $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^2$；　　(2) $\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}^2$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^2$；　　(4) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^n$，$n$ 是正整数；

(5) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}^n$，$n$ 是正整数；　　(6) $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^n$，$n$ 是正整数；

(7) $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}^2$；　　(8) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^2$.

8. 如果 n 级矩阵 B 满足 $B^3=0$，求

$$(I-B)(I+B+B^2).$$

9. 证明：若 B_1,B_2 都与 A 可交换，则 B_1+B_2,B_1B_2 也都与 A 可交换.

10. 证明：如果 $A=\frac{1}{2}(B+I)$，则 $A^2=A$ 当且仅当 $B^2=I$.

11. 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵.证明：如果对于 K^n 中任一列向量 η，都有 $A\eta=0$，则 $A=0$.

§2 特殊矩阵

本节将研究一些特殊矩阵的乘法有什么规律.

定义 1 主对角线以外的元素全为零的方阵称为对**角矩阵**，它形如

$$\begin{pmatrix}d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & d_2 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & & & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & d_n\end{pmatrix},$$

简记作 $\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$.

设 A 是一个 $s\times n$ 矩阵，它的行向量组是 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$；列向量组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.则

$$\begin{pmatrix}d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & d_2 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & & & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & d_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\gamma_1\\d_2\gamma_2\\\vdots\\d_s\gamma_s\end{pmatrix} \tag{1}$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

$$=(d_1\alpha_1,d_2\alpha_2,\cdots,d_n\alpha_n). \tag{2}$$

(1) 式和(2) 式表明:用一个对角矩阵左(右) 乘一个矩阵 A,就相当于用对角矩阵的主对角元分别去乘 A 的相应的行(列).

特别地,有

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} d_1c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_nc_n \end{pmatrix}.$$

上式表明:两个 n 级对角矩阵的乘积还是 n 级对角矩阵,并且是把相应的主对角元相乘.

定义 2 主对角线下(上) 方元素全为零的方阵称为**上(下) 三角矩阵**.

我们有

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2+a_2b_3 \\ 0 & a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

一般地,不难证明:

定理 1 两个 n 级上三角矩阵 A 与 B 的乘积仍为上三角矩阵,并且 AB 的主对角元等于 A 与 B 的相应主对角元的乘积.

对于下三角矩阵也有类似结论.

定义 3 只有一个元素是 1,其余元素全为零的矩阵称为**基本矩阵**.(i,j) 元为 1 的基本矩阵记作 E_{ij}.

对于 2×3 矩阵 $A=(a_{ij})$,我们有

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} + a_{23}E_{23}.$$

一般地,对于 $s \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$,有

$$A = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}. \tag{3}$$

设 A 是一个 $s \times n$ 矩阵,它的行向量组是 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$;列向量组是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 则

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{第 } i \text{ 行}, \tag{4}$$

$$AE_{ij} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0, \cdots, 0, \underset{\text{第}j\text{列}}{\alpha_i}, 0, \cdots, 0), \tag{5}$$

其中 E_{ij} 的未标出元素的地方都是 0.

(4) 式和(5) 式表明:用 E_{ij} 左(右) 乘一个矩阵 A,就相当于把 A 的第 j 行搬到第 i 行的位置(把 A 的第 i 列搬到第 j 列的位置),而乘积矩阵的其余行(列) 全为 0.

定义 4 由单位矩阵经过一次初等行(列) 变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(或①}+\text{②}\cdot k)]{\text{②}+\text{①}\cdot k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(\text{或}(②,③))]{(②,③)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(\text{或}②\cdot c)]{②\cdot c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix},c\neq 0.$$

上述箭头右边的矩阵都是初等矩阵,它们依次记作

$$P(2,1(k)),P(2,3),P(2(c)).$$

设 A 是一个 $s\times n$ 矩阵,它的行向量组是 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$;列向量组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则

$$P(j,i(k))A=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&\vdots&\ddots&&\\&&k&\cdots&1&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\vdots\\\gamma_i\\\vdots\\\gamma_j\\\vdots\\\gamma_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\\vdots\\\gamma_i\\\vdots\\k\gamma_i+\gamma_j\\\vdots\\\gamma_s\end{pmatrix},\tag{6}$$

$$AP(j,i(k))=(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&\vdots&\ddots&&\\&&k&\cdots&1&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+k\alpha_j,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n).\tag{7}$$

(6)式和(7)式表明:用1°型初等矩阵 $P(j,i(k))$ 左(右)乘一个矩阵 A,就相当于把 A 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上(把 A 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上),其余行(列)不变.

对于2°型初等矩阵 $P(i,j)$,3°型初等矩阵 $P(i(c))$,也有类似的结论.我们把这些结论综合写成下述定理:

定理 2 用初等矩阵左(右)乘一个矩阵 A,就相当于对 A 作了一次相应的初等行(列)变换. ▌

注意 $P(j,i(k))$ 既表示把单位矩阵 I 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上得到

的初等矩阵,也表示把 I 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上得到的初等矩阵.

定理 2 把矩阵的初等行(列)变换与矩阵的乘法相联系,这样有两个好处:既可利用初等行(列)变换的直观性,又可利用矩阵乘法的运算性质.

定义 5　一个矩阵 A 如果满足

$$A' = A,$$

则称 A 是**对称矩阵**.

从定义容易看出,对称矩阵一定是方阵,并且有

$$A(i;j) = A'(j;i) = A(j;i),$$

$i,j = 1,2,\cdots,n$. 于是对称矩阵必形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

定义 6　一个矩阵 A 如果满足

$$A' = -A,$$

则称 A 是**斜(反)对称矩阵**.

容易看出,斜对称矩阵一定是方阵,并且有

$$A(i;j) = A'(j;i) = -A(j;i),$$

$i,j = 1,2,\cdots,n$. 特别地,有

$$A(i;i) = -A(i;i),$$

从而 $2A(i;i) = 0$. 由于 A 是数域上的矩阵,因此

$$A(i;i) = 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

于是斜对称矩阵必形如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

习　题　4.2

1. 证明:与主对角元两两不同的对角矩阵可交换的矩阵也是对角矩阵.

2. 证明：两个 n 级上三角矩阵的乘积仍是 n 级上三角矩阵，并且乘积矩阵的主对角元等于因子矩阵的相应主对角元的乘积.

3. 证明：与所有 n 级矩阵可交换的矩阵一定是 n 级数量矩阵.

4. 证明：对于任一 $s\times n$ 矩阵 A，都有 AA'，$A'A$ 是对称矩阵.

5. 证明：两个 n 级对称矩阵的和仍是对称矩阵；一个对称矩阵的 k 倍仍是对称矩阵.

6. 证明：两个 n 级对称矩阵的乘积仍为对称矩阵当且仅当它们可交换.

7. 证明：对于任一 n 级矩阵 A，都有 $A+A'$ 是对称矩阵，$A-A'$ 是斜对称矩阵.

8. 证明：数域 K 上任一 n 级矩阵都可以表示成一个对称矩阵与一个斜对称矩阵之和，并且表法唯一.

9. 证明：如果 A 是实数域上的 n 级对称矩阵，并且 $A^2=0$，则 $A=0$.

10. 证明：数域 K 上奇数级斜对称矩阵的行列式等于零.

*11. 证明：矩阵的 2° 型初等行变换（即，两行互换）可以通过一些 1° 型与 3° 型初等行变换实现.

§3 矩阵乘积的秩与行列式

设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

于是 $\operatorname{rank}(AB)=0$，而 $\operatorname{rank}(A)=1$，$\operatorname{rank}(B)=1$.

又

$$AC=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},$$

于是 $\operatorname{rank}(AC)=1$，而 $\operatorname{rank}(A)=1$，$\operatorname{rank}(C)=2$.

从上述例子，我们猜想：

$$\operatorname{rank}(AB)\leqslant\operatorname{rank}(A)，且\ \operatorname{rank}(AB)\leqslant\operatorname{rank}(B).$$

定理 1 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，则

$$\operatorname{rank}(AB)\leqslant\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}. \tag{1}$$

证明 设 A 的列向量组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则

$$AB=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nm}\end{pmatrix}$$

$$=(b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n,\cdots,b_{1m}\alpha_1+b_{2m}\alpha_2+\cdots+b_{nm}\alpha_n).$$

上式表明,AB 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出.因此,AB 的列秩小于或等于 A 的列秩.即

$$\operatorname{rank}(AB)\leqslant\operatorname{rank}(A).$$

利用这个结论又可以得到

$$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}[(AB)']=\operatorname{rank}(B'A')\leqslant\operatorname{rank}(B')=\operatorname{rank}(B).$$

因此

$$\operatorname{rank}(AB)\leqslant\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}.$$ ▌

命题 2 设 A 是实数域上 $s\times n$ 矩阵,则

$$\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}(AA')=\operatorname{rank}(A).\tag{2}$$

证明 如果我们能够证明 n 元齐次线性方程组$(A'A)X=0$ 与 $AX=0$ 同解,则它们的解空间一致,从而由维数公式得

$$n-\operatorname{rank}(A'A)=n-\operatorname{rank}(A),$$

由此得出,$\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}(A)$.

现在来证明$(A'A)X=0$ 与 $AX=0$ 同解.设 η 是$AX=0$ 的解,则 $A\eta=0$.从而$(A'A)\eta=A'(A\eta)=0$.因此 η 也是$(A'A)X=0$ 的解.反之,设 δ 是$(A'A)X=0$ 的解,则

$$(A'A)\delta=0.\tag{3}$$

(3) 式两边左乘 δ' 得

$$\delta'A'A\delta=0,$$

即

$$(A\delta)'(A\delta)=0.\tag{4}$$

设

$$A\delta=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_s\end{pmatrix},$$

则由(4) 式得

$$(c_1,c_2,\cdots,c_s)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_s\end{pmatrix}=0.$$

即 $c_1^2+c_2^2+\cdots+c_s^2=0$. 由于 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 都是实数,因此

$$c_1=c_2=\cdots=c_s=0.$$

从而 $A\delta=0$. 即 δ 是 $AX=0$ 的解. 因此 $(A'A)X=0$ 与 $AX=0$ 同解. 据前面所述得, $\text{rank}(A'A)=\text{rank}(A)$. 也有

$$\text{rank}(AA')=\text{rank}[(A')'(A')]=\text{rank}(A')=\text{rank}(A).$$ ▌

设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&0\\1&5\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\11&15\end{pmatrix}.$$

从而

$$|AB|=\begin{vmatrix}3&-5\\11&15\end{vmatrix}=45+55=100.$$

又 $$|A|=\begin{vmatrix}1&-1\\2&3\end{vmatrix}=5,|B|=\begin{vmatrix}4&0\\1&5\end{vmatrix}=20,$$

因此 $$|A||B|=100=|AB|.$$

从上例受到启发,我们猜想:对于 n 级矩阵 A、B,有 $|AB|=|A||B|$.

定理 3 设 A,B 都是 n 级矩阵,则

$$|AB|=|A||B|. \tag{5}$$

我们对 $n=2$ 的情形写出证明. 至于一般情形,证明方法是类似的.

我们有

$$\begin{vmatrix}A&0\\-I&B\end{vmatrix}=|A||B|.$$

另一方面,又有

$$\begin{vmatrix}A&0\\-I&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\\-1&0&b_{11}&b_{12}\\0&-1&b_{21}&b_{22}\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{①}+\text{④}\cdot a_{12}]{\text{①}+\text{③}\cdot a_{11}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{②}+\text{④}\cdot a_{22}]{\text{②}+\text{③}\cdot a_{21}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= |AB|.$$

因此 $|AB| = |A|\,|B|$. ▌

用数学归纳法,定理3可以推广到多个 n 级矩阵相乘的情形.

数域上的 n 级矩阵 A 称为**非退化的**,如果 $|A| \neq 0$;否则称为**退化的**.

定理4 (Binet-Cauchy 公式)　设 A 是 $s\times n$ 矩阵,B 是 $n\times s$ 矩阵.如果 $s>n$,则 $|AB| = 0$;如果 $s\leqslant n$,则 $|AB|$ 等于 A 的所有 s 级子式与 B 的相应 s 级子式的乘积之和.即

$$|AB| = \sum_{1\leqslant v_1<v_2<\cdots<v_s\leqslant n} A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & s \\ v_1, & v_2, & \cdots, & v_s \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \cdots, & v_s \\ 1, & 2, & \cdots, & s \end{pmatrix}. \tag{6}$$

证明　如果 $s>n$,则

$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A) \leqslant n < s.$$

因此 s 级矩阵 AB 不是满秩矩阵.从而 $|AB| = 0$.

下面设 $s<n$.我们对 $s=2, n=3$ 的情形写出证明,一般情形的证明方法是类似的.设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

我们用两种方法计算下述行列式 D:

$$D = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix}.$$

一方面将 D 按前2行展开,得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix} 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \\ -1 & b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}(-1)^{(1+2)+(1+3)}\begin{vmatrix} 0 & b_{11} & b_{12} \\ -1 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}(-1)^{(1+2)+(2+3)}\begin{vmatrix} -1 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$$=-\sum_{1\leqslant v_1<v_2\leqslant 3} A\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ v_1, & v_2 \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} v_1, & v_2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

另一方面,类似于定理3的证明方法,首先分别把第3,4,5行的a_{11}, a_{12}, a_{13}倍加到第1行上;然后分别把第3,4,5行的a_{21}, a_{22}, a_{23}倍加到第2行上;最后按前2行展开,得$D=-|AB|$.因此(6)式成立.

习 题 4.3

1. 证明:$\operatorname{rank}(A+B)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

2. 一个矩阵称为行(列)满秩矩阵,如果它的行(列)向量组是线性无关的.证明:如果一个$s\times n$矩阵A的秩为r,则有$s\times r$的列满秩矩阵B和$r\times n$行满秩矩阵C,使得

$$A=BC.$$

3. 证明:设A是n级矩阵,则$|AA'|=|A|^2$.

4. 证明:设A是n级矩阵,如果$AA'=I$,则$|A|=1$或$|A|=-1$.

5. 证明:如果A是数域K上n级矩阵,且满足

$$AA'=I, |A|=-1,$$

则$|I+A|=0$.

6. 证明:如果A是数域K上n级矩阵,n是奇数,且满足

$$AA'=I, |A|=1,$$

则$|I-A|=0$.

7. 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k, k = 0,1,2,\cdots$;设

$$A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}$$

证明:$|A| = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant 3} (x_i - x_j)^2$.

*8. 形如

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix},$$

的方阵 A 称为4级循环矩阵,求复数域上4级循环矩阵 A 的行列式.

9. 用 Binet-Canchy 公式计算下述 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}.$$

10. 设 A 是 $s \times n$ 矩阵,B 是 $n \times s$ 矩阵,设正整数 $r \leqslant s$.证明:如果 $r > n$,则 AB 的所有 r 级子式等于0;如果 $r \leqslant n$,则 AB 的任一 r 级子式为

$$AB\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ j_1, j_2, \cdots, j_r \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant v_1 < v_2 < \cdots < v_r \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ v_1, v_2, \cdots, v_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} v_1, v_2, \cdots, v_r \\ j_1, j_2, \cdots, j_r \end{pmatrix}.$$

§4 可逆矩阵

一元一次方程 $ax = b$,当 $a \neq 0$ 时,两边乘以 $\frac{1}{a}$,得 $x = \frac{b}{a}$.而 $\frac{1}{a}$ 具有下述性质:

$$\frac{1}{a} \cdot a = a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

设 A, C 是已知矩阵,X 是未知矩阵.则 $AX = C$ 称为矩阵方程.能不能像解一元一次方程那样来解矩阵方程 $AX = C$ 呢?这就要问:是否存在一个矩阵 B,使得

$$BA = AB = I.$$

这一节就来探讨这个问题.

定义1 对于数域 K 上的矩阵 A,如果存在数域 K 上的矩阵 B,使得

$$AB = BA = I, \tag{1}$$

则称 A 是**可逆矩阵**(或**非奇异矩阵**).

从(1)式看出,A 与 B 可交换.因此可逆矩阵一定是方阵.适合(1)式的矩阵 B 也是方阵.

如果 A 是可逆矩阵,则适合(1)式的矩阵 B 是唯一的.理由如下:假如还有矩阵 B_1 也适合(1)式,则

$$B_1AB = (B_1A)B = IB = B,$$
$$B_1AB = B_1(AB) = B_1I = B_1.$$

因此 $B = B_1$.

定义 2 如果 A 是可逆矩阵,则适合(1)式的矩阵 B 称为 A 的**逆矩阵**,记作 A^{-1}.

于是,如果 A 是可逆矩阵,则它有逆矩阵 A^{-1} 使得

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{2}$$

从(2)式看出,此时 A^{-1} 也是可逆矩阵,并且

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{3}$$

是不是任何一个方阵都可逆?不是.例如,n 级零矩阵就不是可逆矩阵,因为任何矩阵乘以零矩阵得零矩阵.那么是不是非零方阵都可逆?我们先来求一个方阵为可逆矩阵的必要条件.

命题 1 如果 A 是可逆矩阵,则 $|A| \neq 0$.

证明 如果 A 是可逆矩阵,则它有逆矩阵 A^{-1},使得

$$AA^{-1} = I.$$

从而有 $|AA^{-1}| = |I|$.即 $|A||A^{-1}| = 1$.因此 $|A| \neq 0$. ∎

上述必要条件 $|A| \neq 0$,是不是充分条件?即,如果 $|A| \neq 0$,A 一定是可逆矩阵吗?也就是,如果 $|A| \neq 0$,我们能不能找到一个矩阵 B 使得

$$AB = BA = I.$$

为了找这样的矩阵,我们引出下述概念:

定义 3 把 n 级矩阵 A 的第 1 行元素的代数余子式写成第 1 列,A 的第 2 行元素的代数余子式写成第 2 列,…,第 n 行元素的代数余子式写成第 n 列,组成一个矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

称它为 A 的**伴随矩阵**,记成 A^*.

利用行列式按 1 行展开的公式得出

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| I. \tag{5}$$

类似地,利用行列式按 1 列展开的公式得出

$$A^* A = |A| I. \tag{6}$$

于是,如果 $|A| \neq 0$,则从(5)式和(6)式得出

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I. \tag{7}$$

从而 A 是可逆矩阵.这样我们得到了下述定理:

定理 2　数域 K 上 n 级矩阵 A 可逆的充分必要条件为 $|A| \neq 0$.当 A 可逆时,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*. \tag{8}$$

∎

定理 2 给出了判断一个矩阵是否可逆的一种方法,并且给出了求逆矩阵的一种方法,称之为**伴随矩阵法**.

例 1　设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

问:当 a,b,c,d 满足什么条件时,矩阵 A 可逆?当 A 可逆时,求 A^{-1}.

解　A 可逆 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$

$$\Longleftrightarrow ad - bc \neq 0.$$

当 A 可逆时,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc}\\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}.$$

从定理 2 还可以推导出 n 级矩阵 A 可逆的其他一些充分必要条件.

推论 3 n 级矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(A)=n$(即 A 为满秩矩阵). ▌

推论 4 数域 K 上 n 级矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 的行(列)向量组线性无关. ▌

推论 5 数域 K 上 n 级矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 的行(列)向量组为 K^n 的一个基. ▌

推论 6 数域 K 上 n 级矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 的行(列)空间等于 K^n. ▌

下面给出判别一个矩阵是否可逆的更简便的方法.

命题 7 设 A 与 B 都是 n 级矩阵,如果 $AB=I$,则 A 与 B 都是可逆矩阵,并且 $A^{-1}=B,B^{-1}=A$.

证明 因为 $AB=I$,所以 $|AB|=|I|$.从而 $|A||B|=1$.因此 $|A|\neq 0,|B|\neq 0$.于是 A,B 都可逆,

在 $AB=I$ 两边左乘 A^{-1} 得

$$A^{-1}AB=A^{-1}I,$$

由此得出,$B=A^{-1}$.从而 $B^{-1}=(A^{-1})^{-1}=A$. ▌

命题 7 既给出了判断一个方阵是否可逆的一种方法,同时又可以立即写出可逆矩阵的逆矩阵.

例 2 判断初等矩阵是否可逆?如果可逆,求出它的逆矩阵.

解 由于对单位矩阵 I 相继施行两次初等行变换:ⓙ+ⓘ·k,ⓙ+ⓘ·$(-k)$,仍得到 I,因此

$$P(j,i(-k))\,P(j,i(k))=I.$$

从而 $P(j,i(k))$ 可逆,并且 $P(j,i(k))^{-1}=P(j,i(-k))$.

同理,有 $P(i,j)P(i,j)I=I$.因此,$P(i,j)$ 可逆,并且 $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$.

也有 $P(i(\frac{1}{c}))\,P(i(c))I=I$,因此 $P(i(c))$ 可逆,并且 $P(i(c))^{-1}=P(i(\frac{1}{c}))$.

例 2 表明,初等矩阵都可逆,并且它的逆矩阵是与它同型的初等矩阵.

可逆矩阵有如下一些性质.

性质1 单位矩阵 I 可逆,并且 $I^{-1}=I$. ▌

性质2 如果 A 可逆,则 A^{-1} 也可逆,并且

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$ ▌

性质3 如果 n 级矩阵 A、B 都可逆,则 AB 也可逆,并且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}. \tag{9}$$

证明 因为 A,B 都可逆,所以有 A^{-1},B^{-1},并且

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=I.$$

因此 AB 可逆,并且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. ▌

性质3可以推广到多个 n 级可逆矩阵相乘的情形,即如果 n 级矩阵 A_1, $A_2,\cdots,A_s$ 都可逆,则 $A_1A_2\cdots A_s$ 也可逆,并且有

$$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}. \tag{10}$$

性质4 如果 A 可逆,则 A' 也可逆,并且

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'. \tag{11}$$

证明 因为 A 可逆,所以有 A^{-1},并且

$$A'(A^{-1})'=(A^{-1}A)'=I'=I.$$

因此 A' 可逆,并且 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$. ▌

性质5 可逆矩阵经过初等行变换化成的简化行阶梯形矩阵一定是单位矩阵.

证明 设 n 级可逆矩阵 A 经过初等行变换化成的简化行阶梯形矩阵是 J. 则 J 的非零行数目等于 $\mathrm{rank}(A)=n$. 于是 J 有 n 个主元. 由于它们位于不同的列,从而它们分别位于第 $1,2,\cdots,n$ 列. 即

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=I$$ ▌

性质6 矩阵 A 可逆的充分必要条件是它可以表示成一些初等矩阵的乘积.

证明 充分性 设 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积. 由于初等矩阵都可逆. 因此它们的乘积 A 也可逆.

必要性. 设 A 可逆. 则 A 经过初等行变换化成的简化行阶梯矩阵一定是单位矩阵 I. 因此有初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_t$ 使得

$$P_t\cdots P_2P_1A=I \tag{12}$$

因此

$$A = (P_t\cdots P_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_t^{-1}. \tag{13}$$

由于初等矩阵的逆矩阵仍是初等矩阵,因此(13)式表明:A 可以表示成一些初等矩阵的乘积. ∎

性质 7 用一个可逆矩阵去左(右)乘矩阵 A,不改变 A 的秩.

证明 设 P 为可逆矩阵. 则有初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 使得 $P = P_1P_2\cdots P_m$. 从而

$$PA = P_1P_2\cdots P_mA.$$

即 PA 相当于对 A 作了一系列初等行变换. 由于初等行变换不改变矩阵的秩,因此 $\operatorname{rank}(PA) = \operatorname{rank}(A)$.

类似地,由于初等列变换不改变矩阵的秩,因此用可逆矩阵 Q 右乘 A,有 $\operatorname{rank}(AQ) = \operatorname{rank}(A)$. ∎

除了用伴随矩阵法,以及利用命题 7 去求可逆矩阵的逆矩阵外,还有没有其他方法?你能从公式(12)受到启发,给出求逆矩阵的一种方法吗?

设 A 是 n 级可逆矩阵,则从性质 6 的必要性的证明过程知道,有初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_t$,使得

$$P_t\cdots P_2P_1A = I. \tag{12}$$

由(12)式,根据命题 7 得

$$A^{-1} = P_t\cdots P_2P_1. \tag{14}$$

即

$$P_t\cdots P_2P_1I = A^{-1}. \tag{15}$$

比较(12)式和(15)式得出,**如果用一系列初等行变换把 A 化成了单位矩阵 I,那么同样的这些初等行变换就把 I 化成了 A^{-1}**. 因此我们可以把 A 与 I 并排放在一起,组成一个 $n\times 2n$ 级矩阵 (A,I). **对 (A,I) 作一系列初等行变换,把它的左半部分化成 I,这时的右半部分就是 A^{-1}**. 即

$$(A,I)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(I,A^{-1}). \tag{16}$$

这种求逆矩阵的方法称为**初等变换法**,这是最常用的方法.

例 3 设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1}.

解

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②\cdot(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-1&0\\3&2&1&0&1&0\\5&-3&2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-1&0\\0&5&-2&-3&4&0\\0&2&-3&-5&5&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+③\cdot(-2)}\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-1&0\\0&1&4&7&-6&-2\\0&2&-3&-5&5&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-1&0\\0&1&4&7&-6&-2\\0&0&1&\frac{19}{11}&-\frac{17}{11}&-\frac{5}{11}\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&-\frac{8}{11}&\frac{6}{11}&\frac{5}{11}\\0&1&0&\frac{1}{11}&\frac{2}{11}&-\frac{2}{11}\\0&0&1&\frac{19}{11}&-\frac{17}{11}&-\frac{5}{11}\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{7}{11}&\frac{8}{11}&\frac{3}{11}\\0&1&0&\frac{1}{11}&\frac{2}{11}&-\frac{2}{11}\\0&0&1&\frac{19}{11}&-\frac{17}{11}&-\frac{5}{11}\end{pmatrix}.$$

因此

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{11}&\frac{8}{11}&\frac{3}{11}\\\frac{1}{11}&\frac{2}{11}&-\frac{2}{11}\\\frac{19}{11}&-\frac{17}{11}&-\frac{5}{11}\end{pmatrix}.$$

例4　解矩阵方程 $AX=B$,其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-3&4&-1\\2&1&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5&-1\\-2&3\\1&4\end{pmatrix}.$$

解 如果 A 可逆,则在 $AX = B$ 两边左乘 A^{-1} 得

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

由此得出

$$X = A^{-1}B.$$

先试求 A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{2}{35} & \frac{8}{35} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{35} & \frac{7}{35} & \frac{7}{35} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{4}{35} \end{pmatrix}$$

于是

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{13}{35} & -\frac{2}{35} & \frac{8}{35} \\ \frac{7}{35} & \frac{7}{35} & \frac{7}{35} \\ -\frac{11}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{4}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{13}{35} \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{pmatrix}.$$

例 5 解矩阵方程 $XA = C$,其中 A 同例 4,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 在例 4 中已经知道 A 可逆. 在 $XA = C$ 的两边右乘 A^{-1} 得, $XAA^{-1} = CA^{-1}$. 因此

$$X = CA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{35} & -\frac{2}{35} & \frac{8}{35} \\ \frac{7}{35} & \frac{7}{35} & \frac{7}{35} \\ -\frac{11}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{4}{35} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{79}{35} & -\frac{4}{35} & \frac{16}{35} \\ \frac{33}{35} & \frac{3}{35} & \frac{23}{35} \end{pmatrix}.$$

习 题 4.4

1. 数量矩阵 kI 何时可逆,何时不可逆?当 kI 可逆时,求它的逆矩阵.

2. 下列矩阵可逆吗?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 判断下列矩阵是否可逆,若可逆,求它的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 证明:如果矩阵 A 可逆,则 A^* 也可逆;并且求$(A^*)^{-1}$.

5. 证明:如果 $A^3=0$,则 $I-A$ 可逆;并且求$(I-A)^{-1}$.

6. 证明:如果 n 级矩阵 A 满足 $A^3-2A^2+3A-I=0$,则 A 可逆;并且求 A^{-1}.

7. 证明:如果 n 级矩阵 A 满足 $2A^4-5A^2+4A+2I=0$,则 A 可逆;并且求 A^{-1}.

8. 证明:可逆的对称(斜对称)矩阵的逆矩阵仍是对称(斜对称)矩阵.

9. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

(2) $X \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

11. 证明:可逆的上(下)三角矩阵的逆矩阵仍是上(下)三角矩阵.

12. 证明:如果 $A^k=0$,则 $I-A$ 可逆;并且求$(I-A)^{-1}$.

§5 矩阵的分块

在第 2 章 §6 的最后一段,我们把公式(16) 简洁地写成

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{vmatrix} = |A_1||A_2|,$$

其中 A_1, A_2 分别是 k 级、r 级矩阵,C 是 $r \times k$ 矩阵,0 是 $k \times r$ 零矩阵.我们把一个矩阵写成

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{pmatrix}$$

这种形式,既简洁,又突出了该矩阵的特点.这种形式的矩阵称为分块矩阵.本节来讨论分块矩阵的运算.

由矩阵 A 的若干行、若干列的交叉位置元素按原来顺序排成的矩阵称为 A 的一个**子矩阵**.

把一个矩阵 A 的行分成若干组,列也分成若干组,从而 A 被分成若干个子矩阵,把 A 看成是由这些子矩阵组成的,这称为**矩阵的分块**.这种由子矩阵组成的矩阵称为**分块矩阵**.

从矩阵的加法的定义容易看出,两个具有相同分法的分块矩阵相加,只要把对应的子矩阵相加.

从矩阵的数量乘法的定义容易看出,数 k 乘一个分块矩阵,只要把 k 去乘每一个子矩阵.

分块矩阵的乘法如何进行?我们以下面两个分块矩阵为例:设 $A = (a_{ij})_{s\times n}$,$B = (b_{ij})_{n\times m}$,把 A, B 写成分块矩阵:

$$A = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{array}, \quad A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{array},$$

其中 $s_1 + s_2 = s, n_1 + n_2 = n, m_1 + m_2 = m; A_{11}, \cdots, B_{22}$ 都是矩阵.

我们猜想分块矩阵的乘法可以按普通矩阵的乘法定义进行.因此我们考虑矩阵 C:

$$C = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

现在我们来证明 $AB=C$.

C 的行数为 $s_1+s_2=s$,C 的列数为 $m_1+m_2=m$.因此 C 与 AB 都是 $s\times m$ 矩阵.考虑它们的 (i,j) 元.

$$(AB)(i;j)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

不妨设 $i\leqslant s_1, j=m_1+t,(0<t\leqslant m_2)$,这时 C 的 (i,j) 元就是 $A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}$ 的 (i,t) 元.即

$$\begin{aligned}
C(i;j)&=(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22})(i;t)\\
&=(A_{11}B_{12})(i;t)+(A_{12}B_{22})(i;t)\\
&=\sum_{k=1}^{n_1}A_{11}(i;k)B_{12}(k;t)+\sum_{l=1}^{n_2}A_{12}(i;l)B_{22}(l;t)\\
&=\sum_{k=1}^{n_1}a_{ik}b_{k,(m_1+t)}+\sum_{l=1}^{n_2}a_{i,(n_1+l)}b_{n_1+l,(m_1+t)}\\
&=\sum_{k=1}^{n_1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}a_{ik}b_{kj}\\
&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.
\end{aligned}$$

对于 i,j 的其余情形也可以类似证得 $C(i;j)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

因此 $(AB)(i;j)=C(i;j), 1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant m$.从而

$$AB=C. \qquad \blacksquare$$

类似地可以证明:对于两个分块矩阵,只要它们的分法满足下述条件,则它们的乘法就可以按照普通矩阵的乘法定义进行:

1° 左矩阵的列组数等于右矩阵的行组数;

2° 左矩阵的每个列组所含列数等于右矩阵的相应行组所含行数.

总而言之,左矩阵的列的分法应当与右矩阵的行的分法一致.还要注意:子矩阵之间的乘法应当是左分块矩阵的子矩阵在左边,右分块矩阵的子矩阵在右边,不能颠倒次序.

分块矩阵的乘法有许多应用.我们举一些例子.

例1 设 A 是 $s\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,B 的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$,则

$$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_m). \tag{1}$$

证明 把 A 的所有行作为一组,所有列作为一组;把 B 的所有行作为一

组，列分成 m 组，每组含 1 列，则

$$AB=(A)(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$$
$$=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_m).$$ ▌

公式(1)是非常有用的.看下面的例 2.

例 2 设 $A_{s\times n}\neq 0$，$B_{n\times m}$ 的列向量组是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$. 则 $AB=0\Longleftrightarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.

证明 $AB=0$

$\Longleftrightarrow(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_m)=0$

$\Longleftrightarrow A\beta_1=0,A\beta_2=0,\cdots,A\beta_m=0$

$\Longleftrightarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解. ▌

例 2 使得我们可以利用齐次线性方程组的理论去解决矩阵理论中涉及到 $AB=0$ 的一类问题.

例 3 解矩阵方程 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&0&4\end{pmatrix}.$$

解 设 X 的列向量组是 X_1,X_2,X_3，B 的列向量组是 β_1,β_2,β_3. 则

$$AX=B\Longleftrightarrow(AX_1,AX_2,AX_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$
$$\Longleftrightarrow AX_1=\beta_1,AX_2=\beta_2,AX_3=\beta_3.$$

我们同时来解 3 个线性方程组：$AX_1=\beta_1,AX_2=\beta_2,AX_3=\beta_3$. 它们的系数矩阵都是 A. 因此我们可以如下做：

$$(A\quad B)=\begin{pmatrix}1&-3&-1&0&-2\\-2&6&2&0&4\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{②+①\cdot 2}\begin{pmatrix}1&-3&-1&0&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是 $AX_1=\beta_1,AX_2=\beta_2,AX_3=\beta_3$ 的一般解分别为

$$x_1=3x_2-1,\quad x_1=3x_2,\quad x_1=3x_2-2,$$

其中 x_2 是自由未知量. 由此得出

$$X_1=\begin{pmatrix}3c_1-1\\c_1\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}3c_2\\c_2\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}3c_3-2\\c_3\end{pmatrix}.$$

因此

$$X=\begin{pmatrix}3c_1-1&3c_2&3c_3-2\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix},$$

其中 c_1,c_2,c_3 是任意常数.

注意例3中的矩阵 A 不可逆，因此不能用§4的例4的方法解矩阵方程 $AX=B$.

当 A 可逆时，也可以用现在例3的方法解矩阵方程 $AX=B$：

$$(A\quad B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(I\quad A^{-1}B).$$

即，当左半部分变成 I 时，右半部分就是 $AX=B$ 的解 $A^{-1}B$.

分块矩阵的转置不仅要把第 i 行组写成第 i 列组，而且要把每个子矩阵转置. 例如

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A_1' & A_3' \\ A_2' & A_4' \end{pmatrix}. \tag{2}$$

主对角线上的所有子矩阵都是方阵，其余子矩阵全为0的分块矩阵称为**分块对角矩阵**，它形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是方阵. 分块对角矩阵(3)可简写成

$$\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}.$$

主对角线上的所有子矩阵都是方阵，而位于主对角线下方的所有子矩阵都为0的分块矩阵称为**分块上三角矩阵**，它形如

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 $A_{11},A_{22},\cdots,A_{ss}$ 都是方阵.

分块上三角矩阵有许多应用. 为了把一般的分块矩阵变成分块上三角矩阵，我们引出下述概念：

下述三种变换称为**分块矩阵的初等行变换**：

1° 把一个块行的左 P 倍(P 是矩阵)加到另一个块行上，例如

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{②+P\cdot①} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ PA_{11}+A_{21} & PA_{12}+A_{22} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

2° 两个块行互换位置；

3° 用一个可逆矩阵左乘某一块行.

类似地有**分块矩阵的初等列变换**，但是要注意这时 1° 型和 3° 型都要右乘.

分块单位矩阵(即，把单位矩阵分块得到的分块矩阵)经过一次分块矩阵的初等行(列)变换得到的矩阵称为**分块初等矩阵**. 例如

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \xrightarrow{②+P\cdot①} \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix}. \tag{6}$$

(6) 式箭头右端是一个分块初等矩阵. 我们有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ PA_{11}+A_{21} & PA_{12}+A_{22} \end{pmatrix} \tag{7}$$

把(7)式与(5)式比较得出：**对一个分块矩阵 A 作一次 1° 型分块矩阵的初等行变换，就相当于用一个相应的分块初等矩阵左乘 A** 对于 2° 型、3° 型分块矩阵的初等行变换也有类似结论. 对于分块矩阵的初等列变换也有类似结论(这时要用相应的分块初等矩阵右乘 A)

例 4 设 A、B 分别是 $s\times n$，$n\times s$ 矩阵，则

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = |I_s - AB| \tag{8}$$

证明 设法把(8)式左端变成分块上三角矩阵的行列式. 为此作分块矩阵的初等行变换：

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix} \xrightarrow{②+(-A)\cdot①} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_s - AB \end{pmatrix}. \tag{9}$$

于是

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_s - AB \end{pmatrix} \tag{10}$$

在(10)式两边取行列式，得

$$\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_s \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & I_s - AB \end{vmatrix}.$$

由此得出

$$|I_n|\,|I_s|\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = |I_n|\,|I_s - AB|.$$

从而(8)式成立. ∎

习 题 4.5

1. 证明：设 A,B 分别是 $s\times n,n\times m$ 矩阵. 如果 $AB=0$,则

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\leqslant n.$$

2. 设 A 是 n 级矩阵，且 $A\neq 0$. 证明：存在一个 $n\times m$ 非零矩阵 B，使 $AB=0$ 的充分必要条件为 $|A|=0$.

3. 设 B 为 n 级矩阵，C 为 $n\times m$ 行满秩矩阵. 证明：

(1) 如果 $BC=0$，则 $B=0$；

(2) 如果 $BC=C$，则 $B=I$.

4. 证明：如果 n 级矩阵 A 满足 $A^2=I$（此时称 A 是**对合矩阵**），则

$$\operatorname{rank}(I+A)+\operatorname{rank}(I-A)=n.$$

5. 证明：如果 n 级矩阵 A 满足 $A^2=A$（此时称 A 是**幂等矩阵**），则

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=n.$$

6. 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵，β 是 $\mathbf{R}^s$ 的任意一个列向量. 证明：n 元线性方程组

$$A'AX=A'\beta$$

一定有解.

7. 设 A 是一个 n 级方阵，且 $\operatorname{rank}(A)=1$. 证明：

(1) A 能表示成一个列向量与一个行向量的乘积；

(2) $A^2=kA$，其中 k 是某个数.

8. 设 A 是 n 级矩阵（$n\geqslant 2$），证明：

$$|A^*|=|A|^{n-1}.$$

9. 设 A 是 n 级矩阵（$n\geqslant 2$），证明：

$$\operatorname{rank}(A^*)=\begin{cases}n, & \text{当 } \operatorname{rank}(A)=n\\ 1, & \text{当 } \operatorname{rank}(A)=n-1,\\ 0, & \text{当 } \operatorname{rank}(A)<n-1.\end{cases}$$

10. 设 A 是 n 级矩阵（$n\geqslant 2$），证明：

(1) 当 $n\geqslant 3$ 时，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；

(2) 当 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$.

11. 设 A,B 分别是 $s\times n,s\times m$ 矩阵，证明：矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\quad B)$.

12. 证明：分块对角矩阵 $A=\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 可逆的充分必要条件是它的主对角线上每个子矩阵 A_i 可逆，并且当 A 可逆时，有

$$A^{-1}=\operatorname{diag}\{A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1}\}.$$

13. 设

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix},$$

其中 A_{11},A_{22} 分别是 r 级、s 级方阵.证明:A 可逆当且仅当 A_{11} 与 A_{22} 都可逆,并且当 A 可逆时,有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\ 0 & A_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$

14. 设

$$B=\begin{pmatrix}0 & B_1\\ B_2 & 0\end{pmatrix},$$

其中 B_1,B_2 分别是 r 级、s 级方阵,证明:B 可逆当且仅当 B_1,B_2 都可逆,并且当 B 可逆时,有

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & B_2^{-1}\\ B_1^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

15. 设 A,B,C,D 都是 n 级矩阵,并且 $|A|\neq 0$,$AC=CA$.证明:

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

16. 设 A,B 分别是 $s\times n$,$n\times s$ 矩阵,证明:

$$\begin{vmatrix}I_n & B\\ A & I_s\end{vmatrix}=|I_n-BA|.$$

17. 设 A,B 分别是 $s\times n$,$n\times s$ 矩阵,证明:

$$|I_s-AB|=|I_n-BA|.$$

18. 设 $A=\mathrm{ding}\{a_1I_{n_1},a_2I_{n_2},\cdots,a_sI_{n_s}\}$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 是两两不同的数.证明:与 A 可交换的矩阵一定是分块对角矩阵 $\mathrm{diag}\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$,其中 B_i 是 n_i 级方阵,$i=1,2,\cdots,s$.

§6　正交矩阵·欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$

在平面上取一个直角坐标系 Oxy,设向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的坐标分别是(a_1,a_2),(b_1,b_2).如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是单位向量,并且互相垂直,则它们的坐标满足:

$$\begin{aligned}&a_1^2+a_2^2=1,\quad a_1b_1+a_2b_2=0,\\&b_1^2+b_2^2=1,\quad b_1a_1+b_2a_2=0,\end{aligned}\tag{1}$$

上述4个等式可以写成一个矩阵等式:

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tag{2}$$

设矩阵 A 的第1,2行分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的坐标,则由(2)式得

$$AA' = I.$$

根据 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的几何意义,我们很自然地把这个矩阵 A 称为正交矩阵.

这一节我们来研究正交矩阵的性质,尤其是它的行(列)向量组的特性.

定义1 实数域上的方阵 A 如果满足

$$AA' = I, \tag{3}$$

则称 A 是**正交矩阵**.

从定义1得出,实数域上的方阵 A 是正交矩阵

$\Longleftrightarrow AA' = I$

$\Longleftrightarrow A$ 可逆,并且 $A^{-1} = A'$ (4)

$\Longleftrightarrow A'A = I.$ (5)

例1 判断下述矩阵是否正交矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

其中 θ 是实数.

解

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此 A 是正交矩阵.

正交矩阵具有下列性质:

1° I 是正交矩阵;

2° 若 A 与 B 都是 n 级正交矩阵,则 AB 也是正交矩阵;

3° 若 A 是正交矩阵,则 A^{-1}(即 A')也是正交矩阵;

4° 若 A 是正交矩阵,则 $|A| = 1$ 或 -1.

证明 1°与3°的证明很容易.现在证2°与4°.

若 A、B 都是 n 级正交矩阵,则

$$(AB)(AB)' = A(BB')A' = AIA' = I,$$

因此 AB 也是正交矩阵.

若 A 是正交矩阵,则 $|AA'| = |I|$.从而 $|A||A'| = 1$,即 $|A|^2 = 1$.由此得出 $|A| = 1$ 或 -1. ▎

例1中,设矩阵 A 的行向量组是 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$,则

$$AA' = I$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}(\gamma_1', \gamma_2') = I$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_1' & \gamma_1\gamma_2' \\ \gamma_2\gamma_1' & \gamma_2\gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma_1\gamma_1' = 1, \gamma_1\gamma_2' = 0, \\ \gamma_2\gamma_1' = 0, \gamma_2\gamma_2' = 1. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \gamma_i\gamma_j' = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

一般的 n 级正交矩阵的行向量组是否也有类似的规律?列向量组呢?

定理1　设实数域上 n 级矩阵 A 的行向量组为 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$;列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.则

(1) A 为正交矩阵当且仅当 A 的行向量组满足

$$\gamma_i\gamma_j' = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases} \tag{7}$$

(2) A 为正交矩阵当且仅当 A 的列向量组满足

$$\alpha_i'\alpha_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

证明　(1) A 为正交矩阵

$$\Longleftrightarrow AA' = I$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}(\gamma_1', \gamma_2', \cdots, \gamma_n') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Longleftrightarrow \gamma_i\gamma_j' = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

(2) A 为正交矩阵

$$\Longleftrightarrow A'A = I$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_i'\alpha_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$ ∎

我们引用一个符号 δ_{ij},它的含意是

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

δ_{ij} 称为 Kronecker(克朗内克)记号.采用这个符号,(7)式和(8)式可分别写成:

$$\gamma_i \gamma_j' = \delta_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n; \tag{9}$$

$$\alpha_i' \alpha_j = \delta_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{10}$$

定理1告诉我们,正交矩阵的行向量组满足(9)式,列向量组满足(10)式.这两组式子的左端都是两个 n 元有序数组的对应元素的乘积之和.这与几何空间中两个向量的内积在直角坐标系中的计算公式相像.由此类比,我们可以在实数域上的 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中也引进内积的概念.

定义2 在 $\mathbf{R}^n$ 中,任给 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$,规定

$$(\alpha, \beta) \xlongequal{\text{def}} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \tag{11}$$

这个二元实值函数 (α, β) 称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个**内积**,通常称这个内积为 $\mathbf{R}^n$ 的**标准内积**.(11)式也可写成

$$(\alpha, \beta) = \alpha \beta'.$$

容易直接按照定义验证 $\mathbf{R}^n$ 的标准内积具有下列基本性质:对一切 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^n, k \in \mathbf{R}$ 有

1° $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,(**对称性**);

2° $(\alpha + \gamma, \beta) = (\alpha, \beta) + (\gamma, \beta)$,(**线性**);

3° $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$,(**线性**);

4° $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$;等号成立当且仅当 $\alpha = 0$,(**正定性**).

由 1°,2°,3° 可以得出

$$(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta),$$

$$(\alpha, k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2) = k_1(\alpha, \beta_1) + k_2(\alpha, \beta_2).$$

如果 α, β 是列向量,则标准内积 (α, β) 可以写成 $(\alpha, \beta) = \alpha' \beta$.

n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 有了标准内积后,就称 $\mathbf{R}^n$ 为一个**欧几里得空间**.

在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中,向量 α 的长度 $|\alpha|$ 规定为

$$|\alpha| \xlongequal{\text{def}} \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

长度为1的向量称为**单位向量**.显然,α 是单位向量的充分必要条件为 $(\alpha, \alpha) = 1$.

容易验证:

$$|k\alpha| = |k| |\alpha|.$$

于是对于 $\alpha \neq 0$,有 $|\alpha|^{-1}\alpha$ 一定是单位向量.把非零向量 α 乘以 $|\alpha|^{-1}$,称为把

α **单位化**.

在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中,如果$(\alpha,\beta)=0$,则称 α 与β 是**正交的**,记作 $\alpha\perp\beta$.

显然,零向量与任何向量都正交.

欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中,由非零向量组成的向量组如果其中每两个不同的向量都正交(即它们两两正交),则称它们是**正交向量组**.

仅由一个非零向量组成的向量组也是正交向量组.

如果正交向量组的每个向量都是单位向量,则称它为**正交单位向量组**.

命题 2 欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中,正交向量组一定是线性无关的.

证明 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是正交向量组.设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0. \tag{14}$$

把(14)式两端的向量都与 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 作内积,得

$$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s,\alpha_i)=(0,\alpha_i). \tag{15}$$

由于$(\alpha_j,\alpha_i)=0$,当 $j\neq i$,因此由(15)式得

$$k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0 \tag{16}$$

由于 $\alpha_i\neq 0$,因此$(\alpha_i,\alpha_i)\neq 0$.从而由(16)式得,$k_i=0$,其中 $i=1,2,\cdots,s$.于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. ▌

据命题 2 得,欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中,n 个向量组成的正交向量组一定是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基,称它为**正交基**. n 个单位向量组成的正交向量组称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个**标准正交基**.

例如,容易看出,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是两两正交的,并且每个都是单位向量,因此 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基.

命题 3 实数域上 n 级矩阵 A 是正交矩阵的充分必要条件为:A 的行(列)向量组是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基.

证明 设 A 的行向量组为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$.则

实数域上 n 级矩阵 A 是正交矩阵

$\Longleftrightarrow \gamma_i\gamma_j'=\delta_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n$

$\Longleftrightarrow (\gamma_i,\gamma_j)=\delta_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n$

$\Longleftrightarrow \gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基.

同理可证,A 的列向量组是 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基. ▌

命题 3 告诉我们,构造正交矩阵等价于求标准正交基.许多实际问题需要构造正交矩阵,于是我们要设法求标准正交基.

平面上给了两个不共线向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,我们很容易找到一个正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$,

$\boldsymbol{\beta}_2$ 如图 4－2 所示.

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_1,$$

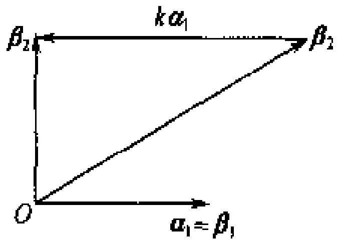


图 4－2

为了求待定系数 k,在上式两边用 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 去作内积,得

$$(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1).$$

从而

$$0 = (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) + k(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1).$$

因此 $k = -\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1. \tag{17}$$

从几何上的这个例子受到启发,对于欧几里得空间 R^n,我们可以从一个线性无关的向量组出发,构造一个正交向量组.

定理 4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个线性无关的向量组,令

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \beta_s &= \alpha_s - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(\alpha_s, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}\beta_j, \end{aligned} \tag{18}$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是正交向量组,并且 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价.

证明 对线性无关的向量组所含向量的数目 s 作数学归纳法.

$s = 1$ 时,即向量组为 α_1 且 $\alpha_1 \neq 0$. 此时令 $\beta_1 = \alpha_1$,则 β_1 是正交向量组. 显然,$\{\alpha_1\} \cong \{\beta_1\}$.

假设 $s = k$ 时命题为真,即 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 是正交向量组,且它与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 等

价.现在来看 $s=k+1$ 的情形.由于

$$\beta_{k+1}=\alpha_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\alpha_{k+1},\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j,\tag{19}$$

因此当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时,有

$$\begin{aligned}(\beta_{k+1},\beta_i)&=(\alpha_{k+1},\beta_i)-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\alpha_{k+1},\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}(\beta_j,\beta_i)\\&=(\alpha_{k+1},\beta_i)-\frac{(\alpha_{k+1},\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}(\beta_i,\beta_i)=0.\end{aligned}$$

这表明 β_{k+1} 与 β_i 正交($i=1,2,\cdots,k$).从(19)式以及归纳假设可以看出,β_{k+1} 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$ 线性表出,并且表出式中 α_{k+1} 的系数为1,因此 $\beta_{k+1}\neq 0$,于是 $\beta_1,\cdots,\beta_k,\beta_{k+1}$ 是正交向量组.从(19)式以及归纳假设立即得出 $\beta_1,\cdots,\beta_k,\beta_{k+1}$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$ 等价.因此,$s=k+1$ 时,命题也为真.

据数学归纳法原理,命题为真. ∎

定理4给出了由欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中一个线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 出发,构造出与它等价的一个正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的方法,这种方法称为**施密特(Schmidt)正交化过程**.只要再将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 中每个向量单位化,即令

$$\eta_i=\frac{1}{|\beta_i|}\beta_i,\quad i=1,2,\cdots,s\tag{20}$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价的正交单位向量组.

欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中,如果给了一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则先经过施密特正交化过程,然后经过单位化,得到的向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 就是 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基.

例2 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^3$ 中,设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

求与 α_1,α_2 等价的正交单位向量组.

解 首先正交化,令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}.$$

然后单位化,令

$$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\sqrt{5}\\-\frac{1}{5}\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},$$

$$\eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{5}}}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{15}\sqrt{5}\\\frac{4}{15}\sqrt{5}\\\frac{1}{3}\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

则 η_1,η_2 是与 α_1,α_2 等价的正交单位向量组.

习 题 4.6

1. 判断下列矩阵是否正交矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$;　　(8) $\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

2. 求第1题中各个矩阵的行列式.

3. 证明:如果 A 是实数域上 n 级对称矩阵,T 是 n 级正交矩阵,则 $T^{-1}AT$ 是对称矩阵.

4. 证明:实数域上的 n 级矩阵 A 如果具有下列三个性质中的任意两个性质,则必有第三个性质:正交矩阵,对称矩阵,对合矩阵.

5. 证明：如果正交矩阵 A 是上三角矩阵，则 A 一定是对角矩阵，并且其主对角元是 1 或 -1.

6. 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^4$ 中，计算 (α,β)：

(1) $\alpha=(-1,\ 0,\ 3,\ -5)$，$\beta=(4,\ -2,\ 0,\ 1)$；

(2) $\alpha=(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4},\ -1)$，$\beta=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -2,\ \sqrt{3},\ \frac{2}{3})$.

7. 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^4$ 中，把下列向量单位化：

(1) $\alpha=(3,\ 0,\ -1,\ 4)$；(2) $\alpha=(5,\ 1,\ -2,\ 0)$.

8. 证明：在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中，如果 α 与 β 正交，则对任意实数 k,l，有 $k\alpha$ 与 $l\beta$ 也正交.

9. 证明：在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中，如果 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 都正交，则 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的任一线性组合也正交.

10. 证明：在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中，如果 α 与任意向量都正交，则 $\alpha=0$.

11. 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^3$ 中，设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

求与 α_1,α_2 等价的正交单位向量组.

12. 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^4$ 中，设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix};$$

求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的正交单位向量组.

13. 设 A 是 n 级正交矩阵，证明：对于欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中任一列向量 α，都有 $|A\alpha|=|\alpha|$.

14. 设 A 是实数域上的 n 级可逆矩阵，证明：A 可以分解成

$$A=TB,$$

其中 T 是正交矩阵，B 是上三角矩阵，并且 B 的主对角元都为正数；证明这种分解是唯一的.

§7 K^n 到 K^s 的线性映射

同学们进入学校学习，住校生需要分配宿舍，给全校每一位住校生指定学生宿舍区里唯一的一个房间.

数域 K 上每一个 n 级矩阵 A，都有它的行列式 $|A|\in K$.

上述不同的例子有共同点，每个例子中都涉及两个集合，以及这两个集合之间的一个对应法则.由此抽象出映射的概念.

定义1 设 S 和 S' 是两个集合，如果存在一个法则 f，使得集合 S 中每一个元素 a，都有集合 S' 中唯一确定的元素 b 与它对应，则称 f 是 S 到 S' 的一个**映射**，记作

$$\begin{aligned} f: S &\longrightarrow S' \\ a &\longmapsto b, \end{aligned}$$

其中 b 称为 a 在 f 下的**象**，a 称为 b 在 f 下的一个**原象**. a 在 f 下的象用符号 $f(a)$（或 fa）表示，于是映射 f 也可以记成

$$f(a) = b, a \in S.$$

设 f 是集合 S 到集合 S' 的一个映射，则把 S 叫做映射 f 的**定义域**，把 S' 叫做 f 的**陪域**. S 的所有元素在 f 下的象组成的集合叫做 f 的**值域**或 f 的**象**，记作 $f(S)$ 或 $\mathrm{Im} f$. 即

$$f(S) \xlongequal{\text{def}} \{f(a) \mid a \in S\} = \{b \in S' \mid \text{存在} a \in S \text{使} f(a) = b\}$$

容易看出，$f(S) \subseteq S'$，即 f 的值域是 f 的陪域的子集.

设 f 是集合 S 到集合 S' 的一个映射. 如果 f 的值域 $f(S)$ 与陪域 S' 相等，则称 f 是**满射**（或 f 是 S 到 S' 上的映射）. 显然，f 是满射当且仅当 f 的陪域中的每一个元素都有至少一个原象.

如果定义域 S 中不同的元素在映射 f 下的象也不同，则称 f 是**单射**（或 f 是 1-1 的映射）. 显然，f 是单射当且仅当从 $a_1, a_2 \in S$，且 $f(a_1) = f(a_2)$ 可以推出 $a_1 = a_2$.

如果映射 f 即是单射，又是满射，则称 f 是**双射**（或 f 是 S 到 S' 的**一一对应**）. 显然，f 是双射当且仅当陪域中每一个元素都有唯一的一个原象.

映射 f 与映射 g 称为**相等**，如果它们的定义域相同，陪域相同，并且对应法则也相同（即 $\forall x \in S$，有 $f(x) = g(x)$）.

集合 S 到自身的每一个映射，通常称为 S 上的一个**变换**.

集合 S 到数集（数域 K 的任一非空子集）的每一个映射，通常称为 S 上的一个**函数**. 即，通常认为函数是陪域为数集的映射.

陪域 S' 中的元素 b 在映射 f 下的所有原象组成的集合称为 b 在 f 下的**原象集**，记作 $f^{-1}(b)$，它是定义域 S 的一个子集.

我们来看上面提到的各个例子.

分配宿舍是全校住校生组成的集合到学校学生宿舍区的所有房间组成的集合的一个映射. 它不是单射（因为一个房间住了好几名学生）. 如果学生宿舍

区的房间都有学生住的话,它是满射.

把数域 K 上每一个 n 级矩阵 A 对应到它的行列式 $|A|$,是 K 上所有 n 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$ 到数域 K 的一个映射,称它为行列式函数,用 det 表示.它不是单射(因为不同的两个矩阵有可能行列式相同),它是满射.

定义 2 映射 $f:S\to S$ 如果把 S 中每一个元素对应到它自身,即 $\forall x\in S$,有 $f(x)=x$,则称 f 是**恒等映射**(或 S 上的**恒等变换**)记作 1_S.

定义 3 相继施行映射 $g:S\to S'$ 和 $f:S'\to S''$,得到一个 S 到 S'' 的映射,称为 f 与 g 的**乘积**(或**合成**),记作 fg.即

$$(fg)(a)\xlongequal{\text{def}}f(g(a)),\ \forall a\in S. \tag{1}$$

定理 1 映射的乘法适合结合律.即,如果 $h:S\to S'$,$g:S'\to S''$,$f:S''\to S'''$,则 $f(gh)=(fg)h$.

证明 $f(gh)$ 与 $(fg)h$ 都是 S 到 S''' 的映射.对任意 $a\in S$,有

$$[f(gh)]a=f[(gh)a]=f[g(ha)],$$
$$[(fg)h]a=(fg)(ha)=f[g(ha)].$$

因此,$f(gh)=(fg)h$. ▌

注意映射的乘法不适合交换律.

容易直接验证,对于任意一个映射 $f:S\to S'$,有

$$f1_S=f,\ 1_{S'}f=f. \tag{2}$$

定义 4 设 $f:S\to S'$,如果存在一个映射 $g:S'\to S$,使得

$$fg=1_{S'},\ gf=1_S, \tag{3}$$

则称映射 f 是**可逆的**,此时称 g 是 f 的一个**逆映射**.

容易证明,如果 f 是可逆的,则它的逆映射是唯一的.我们把 f 的逆映射记作 f^{-1}.从(3)式得

$$ff^{-1}=1_{S'},\ f^{-1}f=1_S \tag{4}$$

(4)式表明,当 f 是可逆映射时,它的逆映射 f^{-1} 也可逆,并且

$$(f^{-1})^{-1}=f. \tag{5}$$

定理 2 映射 $f:S\to S'$ 是可逆的充分必要条件为 f 是双射.

证明 必要性.设 $f:S\to S'$ 是可逆的,则有逆映射 $f^{-1}:S'\to S$,并且有

$$ff^{-1}=1_{S'},\ f^{-1}f=1_S.$$

任给 $a'\in S'$,有 $f^{-1}(a')\in S$,且

$$f(f^{-1}(a')),=(ff^{-1})(a')=1_{S'}(a')=a',$$

因此 a' 在 f 下有至少一个原象 $f^{-1}(a')$,从而 f 是满射.

任给 $a_1,a_2 \in S$，假如 $f(a_1)=f(a_2)$，则

$$f^{-1}(f(a_1))=f^{-1}(f(a_2)),$$

由于 $f^{-1}(f(a_1))=(f^{-1}f)(a_1)=1_S(a_1)=a_1$，同理 $f^{-1}(f(a_2))=a_2$，因此，$a_1=a_2$，从而 f 是单射．因此 f 是双射．

充分性，设 $f:S\to S'$ 是双射．则对于任意 $a'\in S'$，a' 在 f 下有唯一的一个原象 a，此时 $f(a)=a'$．令

$$\begin{aligned} g:S'&\longrightarrow S\\ a'&\longmapsto a\end{aligned}$$

则 g 是 S' 到 S 的一个映射，并且

$$(fg)(a')=f(g(a'))=f(a)=a',$$

因此 $fg=1_{S'}$．

任取 $x\in S$，由映射 g 的定义知道，$g(f(x))=x$．因此

$$(gf)(x)=g(f(x))=x.$$

从而 $gf=1_S$．因此 f 是可逆的 ∎

设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵，令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}:K^n&\longrightarrow K^s\\ \alpha&\longmapsto A\alpha.\end{aligned} \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 是 K^n 到 K^s 的一个映射．这个映射具有下列性质：$\forall\,\alpha,\beta\in K^n,k\in K$，有

$$\boldsymbol{A}(\alpha+\beta)=A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=\boldsymbol{A}(\alpha)+\boldsymbol{A}(\beta), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}(k\alpha)=A(k\alpha)=k(A\alpha)=k\boldsymbol{A}(\alpha). \tag{8}$$

前一条性质叫做 $\boldsymbol{A}$ 保持加法，后一条性质叫做 $\boldsymbol{A}$ 保持数量乘法．由此抽象出下述概念：

定义 5　K^n 到 K^s 的一个映射 σ 如果保持加法和数量乘法，即 $\forall\,\alpha,\beta\in K^n,k\in K$，有

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta), \tag{9}$$

$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha), \tag{10}$$

则称 σ 是 K^n 到 K^s 的一个**线性映射**．

用(6)式定义的映射 $\boldsymbol{A}(\alpha)=A\alpha$ 就是 K^n 到 K^s 的一个线性映射．这个线性映射很有用．

事实 1　n 元线性方程组 $AX=\beta$ 有解

$\Longleftrightarrow$ 存在 $\gamma\in K^n$，使得 $A\gamma=\beta$

$\Longleftrightarrow$ 存在 $\gamma\in K^n$，使得 $\boldsymbol{A}(\gamma)=\beta$

$\Longleftrightarrow \beta \in \mathrm{Im}\boldsymbol{A}$.

由事实 1 得

事实 2 设 A 的列向量组是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,则

$$\begin{aligned} &\beta \in \mathrm{Im}\boldsymbol{A} \\ \Longleftrightarrow\ &\text{线性方程组 } AX = \beta \text{ 有解} \\ \Longleftrightarrow\ &\beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle. \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Im}\boldsymbol{A} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle$. (11)

即,线性映射 $\boldsymbol{A}$ 的象(值域)等于矩阵 A 的列空间. 从而 $\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ 是 K^s 的一个子空间.

事实 3 设齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间是 W,则

$$\begin{aligned} &\eta \in W \\ \Longleftrightarrow\ &A\eta = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\boldsymbol{A}(\eta) = 0. \end{aligned}$$

由此受到启发,引出下述概念.

定义 6 设 σ 是 K^n 到 K^s 的一个映射,考虑 K^n 的一个子集:

$$\{\alpha \in K^n \mid \sigma(\alpha) = 0\}, \tag{12}$$

称这个子集是映射 σ 的**核**,记作 $\mathrm{Ker}\ \sigma$.

容易验证,如果 σ 是 K^n 到 K^s 的一个线性映射,则 $\mathrm{Ker}\ \sigma$ 是 K^n 的一个子空间.

对于线性映射 $\boldsymbol{A}(\alpha) = A\alpha$,从上述讨论得

$$\begin{aligned} &\eta \in W \\ \Longleftrightarrow\ &\boldsymbol{A}(\eta) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\eta \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = W$. (13)

即,线性映射 $\boldsymbol{A}$ 的核等于齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间.

试问: $\dim \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$ 与 $\dim \mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ 有什么联系?

由于 $\dim W = n - \mathrm{rank}(A)$,而且 $\dim W = \dim \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$,

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle = \dim \mathrm{Im}\boldsymbol{A},$$

因此

$$\dim \mathrm{Ker}\boldsymbol{A} + \dim \mathrm{Im}\boldsymbol{A} = \dim K^n. \tag{14}$$

(14) 式是一个重要的公式. 注意 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$ 是 K^n 的一个子空间,而 $\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ 是 K^s 的一个子空间,它们的维数却被公式(14) 联系起来了,这是一个多么漂亮的公式!

习 题 4.7

1. 判别下列对应法则是否为 **R** 到自身的映射?是否单射?是否满射?

(1) $x \longmapsto x^3$; (2) $x \longmapsto x^2 - x$;

(3) $x \longmapsto 2^x$; (4) $x \longmapsto \ln x$

2. 设 $f: S \to S'$; $g: S' \to S''$. 证明:如果 f 和 g 都是单射(满射),则 gf 也是单射(满射).

3. 设 $f: S \to S'$; $g: S' \to S''$. 证明:如果 f 和 g 都是可逆的,则 gf 也是可逆的,并且有

$$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$$

4. 设 S 是一个有限集合. 证明:如果映射 $f: S \to S$ 是单射,则 f 一定是双射.

5. 证明:一个有限集合到它自身的满射一定是双射.

6. 设 S 和 S' 是两个有限集,如果存在 S 到 S' 的一个双射 f,则 $|S| = |S'|$.

7. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{A}(\alpha) = A\alpha, \forall \alpha \in K^4.$$

(1) 求 $\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ 的维数和一个基;

(2) 求 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$ 的维数和一个基.

应用与实验课题:区组设计的关联矩阵

本章开头讲了对于7个水稻品种如何安排试验田来比较它们的优劣. 这是区组设计的一个最简单的例子. 一般地,一个**区组设计**是把 v 个不同的对象编进 b 个区组里的一种安排方法,要求满足下面两个条件:

1° 每个区组恰好包含 k 个不同对象($2 \leqslant k < v$);

2° 每两个不同的对象一起恰好出现在 λ 个区组里.

一个参数为(v, b, k, λ)的区组设计可以用一个 $v \times b$ 矩阵 M 来表示,其中

$$M(i;j) \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} 1, & \text{当对象 } P_i \text{ 出现在区组 } B_j \text{ 里}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

这个矩阵 M 称为区组设计的**关联矩阵**.

利用关联矩阵可以研究区组设计的性质.

1. 设 M 是参数为(v,b,k,λ)的区组设计的关联矩阵.证明:M 的每一列元素的和(简称为**列和**)都等于 k;M 的每两行的内积等于 λ.

2. 设 M 是参数为(v,b,k,λ)的区组设计的关联矩阵.证明:M 的每一行元素的和(简称为**行和**)是个常数,它等于$\frac{\lambda(v-1)}{k-1}$,把这个数记作 r.

3. 证明:参数为(v,b,r,k,λ)的区组设计必满足

$$\lambda(v-1)=r(k-1),\quad vr=bk.$$

4. 设 M 是参数为(v,b,r,k,λ)的区组设计的关联矩阵.求 MM',$|MM'|$,$\operatorname{rank}(MM')$.

5. 证明:参数为(v,b,r,k,λ)的区组设计必满足

$$v\leqslant b.$$

第 5 章　矩阵的相抵与相似

从第 1 章至第 4 章，我们多次使用了矩阵的初等行变换或初等列变换.如果一个矩阵 A 经过初等行、列变换变成矩阵 B，则我们称 A 与 B 是**相抵**的.

设 A 是数域 K 上一个 n 级矩阵，P 是数域 K 上一个 n 级可逆矩阵，我们称 A 与 $P^{-1}AP$ 是**相似**的.

本章来讨论矩阵的相抵关系与相似关系.首先，我们将在第 1 节一般地讨论集合的元素之间的关系.

§1　等价关系与集合的划分

为了考虑集合的元素之间的关系，我们首先引进一个概念：设 S, M 是两个集合，下述集合

$$\{(a,b) \mid a \in S, b \in M\}$$

称为 S 与 M 的**笛卡儿积**，记作 $S \times M$.

北京大学数学科学学院的本科生，在二年级上学期要分配到各个系.用 S 表示当年北大数学学院二年级所有本科生组成的集合，分别用 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 表示分配到数学系，概率统计系，科学与工程计算系，信息科学系，金融数学系的学生组成的集合，它们都是 S 的子集.我们来考虑 S 的元素之间的一种关系：系友(指分在同一个系).显然 S 里的两个学生要么是系友，要么不是系友，二者必居其一，且只居其一.如何用数学语言刻画这一关系？对于 $a, b \in S$，我们有

$$\begin{aligned} & a \text{ 与 } b \text{ 是系友} \\ \Longleftrightarrow\ & (a,b) \in (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup (S_3 \times S_3) \cup (S_4 \times S_4) \cup (S_5 \times S_5) \\ \Longleftrightarrow\ & (a,b) \in \bigcup_{i=1}^{5} (S_i \times S_i). \end{aligned}$$

令 $W = \bigcup_{i=1}^{5} (S_i \times S_i)$.显然 W 是 $S \times S$ 的一个子集.由上述知道

$$a \text{ 与 } b \text{ 是系友} \Longleftrightarrow (a,b) \in W.$$

于是我们干脆把 W 叫做系友关系.由此抽象出下述概念：

定义 1　设 S 是一个非空集合，我们把 $S \times S$ 的一个非空子集 W 叫做 S

上的一个**二元关系**.如果$(a,b)\in W$,则称a与b有W关系;如果$(a,b)\notin W$,则称a与b没有W关系.当a与b有W关系时,记作aWb,或记作$a\sim b$.

上述例子中,S上的系友关系具有反身性($a\sim a$),对称性($a\sim b\Longrightarrow b\sim a$),传递性($a\sim b$且$b\sim c\Longrightarrow a\sim c$).由此抽象出下述概念:

定义2 集合S上的一个二元关系$\sim$如果具有下述性质:$\forall a,b,c\in S$,有

1° $a\sim a$ (反身性),

2° $a\sim b\Longrightarrow b\sim a$ (对称性),

3° $a\sim b$且$b\sim c\Longrightarrow a\sim c$ (传递性),

则称$\sim$是S上的一个**等价关系**.

设$\sim$是集合S上的一个等价关系,对于$a\in S$,令

$$\bar{a}\xlongequal{\text{def}}\{x\in S\mid x\sim a\},$$

称$\bar{a}$是由a确定的**等价类**.

事实1 $a\in\bar{a}$.于是也把$\bar{a}$称为a的等价类.

事实2 $x\in\bar{a}\Longleftrightarrow x\sim a$.

事实3 x,y属于同一个等价类

$\Longrightarrow x,y\in\bar{a}$

$\Longrightarrow x\sim a$且$y\sim a$

$\Longrightarrow x\sim y$.

反之,$x\sim y\Longrightarrow x\in\bar{y}\Longrightarrow x$与$y$属于同一个等价类.

事实4 $\bar{x}=\bar{y}\Longleftrightarrow x\sim y$.

证明 必要性由事实3立即得出.

充分性.设$x\sim y$.任取$c\in\bar{x}$,则$c\sim x$.从而$c\sim y$.因此$c\in\bar{y}$.这表明$\bar{x}\subseteq\bar{y}$.由对称性得$y\sim x$.由刚刚证得的结论得,$\bar{y}\subseteq\bar{x}$.因此$\bar{x}=\bar{y}$. ▌

定理1 设$\sim$是集合S上的一个等价关系,任取$a,b\in S$,则$\bar{a}$与$\bar{b}$或者相等,或者不相交(即,$\bar{a}\cap\bar{b}=\varnothing$).

证明 如果$\bar{a}\neq\bar{b}$,我们来证$\bar{a}\cap\bar{b}=\varnothing$,假如$c\in\bar{a}\cap\bar{b}$,则$c\in\bar{a}$且$c\in\bar{b}$,于是$c\sim a$且$c\sim b$.从而$a\sim b$.据事实4得,$\bar{a}=\bar{b}$.矛盾. ▌

定义3 如果集合S是一些非空子集S_i($i\in I$,这里I表示指标集)的并集,并且其中不相等的子集一定不相交,则称集合

$$\{S_i\mid i\in I\}$$

是S的一个**划分**,记作$\pi(S)$.

定理2 设$\sim$是集合S上的一个等价关系,则所有等价类组成的集合是S的一个划分,记作$\pi_{\sim}(S)$.

证明 $\forall a\in S$,有 $a\in\bar{a}$.因此 $S=\bigcup\limits_{a\in S}\bar{a}$.据定理1得,如果 $\bar{a}\neq\bar{b}$,则 $\bar{a}\cap\bar{b}=\varnothing$.因此所有等价类组成的集合是 S 的一个划分. ▌

在整数集 $\mathbf{Z}$ 上定义一个二元关系如下:

$$a\sim b\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}a\text{ 与 }b\text{ 被 7 除所得余数相同}$$

此时称 a 与 b **模7同余**,记作 $a\equiv b(\bmod 7)$.显然模7同余是 $\mathbf{Z}$ 上一个等价关系.共有7个等价类:

$$\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}.$$

它们组成的集合是 $\mathbf{Z}$ 的一个划分.我们也把它们组成的集合称为 Z 对于模7同余关系的商集,记作 $\mathbf{Z}/(7)$.即

$$\mathbf{Z}/(7)=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}.$$

一般地,有

定义4 设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系.由所有等价类组成的集合称为 S 对于关系 $\sim$ 的**商集**,记作 $S/\sim$.

集合 S 的商集 $S/\sim$ 与 S 的划分 $\pi_{\sim}(S)$ 是同一个集合的两种说法.在不同的场合使用不同的说法.

注意 S 的商集 $S/\sim$ 里的元素是 S 的子集,不是 S 的元素.

习 题 5.1

1. 在平面 S(点集)上定义一个二元关系:

$$P_1(x_1,y_1)\sim P_2(x_2,y_2)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}x_1-x_2\in\mathbf{Z}\text{ 且 }y_1-y_2\in\mathbf{Z},$$

证明:$\sim$ 是 S 上的一个等价关系.

2. 在平面 S(点集)上定义一个二元关系:

$P\sim Q\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}P$ 与 Q 位于同一条水平线上(与 x 轴平行或重合的直线)证明:$\sim$ 是 S 上的一个等价关系;商集 $S/\sim$ 的元素是什么?

3. 设 $S=\{a,b,c\}$,问:S 有多少种划分?S 有多少个不同的商集?

4. 写出 $\mathbf{Z}$ 对于模3同余关系的商集 $\mathbf{Z}/(3)$.

5. 写出 $\mathbf{Z}$ 对于模2同余关系的商集 $\mathbf{Z}/(2)$,它的元素是 $\mathbf{Z}$ 的什么样的子集?

§2 矩阵的相抵

第一章 §1 中我们指出,任一矩阵 A 经过初等行变换能化成简化行阶梯

形矩阵J.如果对J再施行初等列变换,那么能变成什么样的最简单形式的矩阵?让我们看一个例子:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1&-2&1\\2&-4&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

最后这个矩阵非常简单,把它写成分块矩阵的形式就是:

$$\begin{pmatrix}I_2&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

把一个矩阵经过初等行(列)变换化成最简单形式的矩阵,将使许多问题的研究变得简单明晰.本节来仔细讨论这一问题.

定义 1 数域K上的矩阵A如果经过一系列初等行变换和初等列变换变成矩阵B,则称A与B是**相抵的**,记作$A\overset{\text{相抵}}{\sim}B$.

从定义容易看出,相抵是数域K上所有$s\times n$矩阵组成的集合$M_{s\times n}(K)$上的一个二元关系,它满足:$\forall A,B,C\in M_{s\times n}(K)$,有

1° $A\overset{\text{相抵}}{\sim}A$ (反身性);

2° $A\overset{\text{相抵}}{\sim}B\Longrightarrow B\overset{\text{相抵}}{\sim}A$ (对称性);

3° $A\overset{\text{相抵}}{\sim}B$且$B\overset{\text{相抵}}{\sim}C\Longrightarrow A\overset{\text{相抵}}{\sim}C$ (传递性).

因此,相抵是$M_{s\times n}(K)$上的一个等价关系.在相抵关系下,矩阵A的等价类称为A的**相抵类**.

事实 1 数域K上$s\times n$矩阵A与B相抵

$\Longleftrightarrow$ A经过初等行变换和初等列变换变成B

$\Longleftrightarrow$ 存在K上s级初等矩阵$P_1,P_2,\cdots,P_t$与n级初等矩阵$Q_1,Q_2,\cdots,Q_m$,使得

$$P_t\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_m=B$$

$\Longleftrightarrow$ 存在K上s级可逆矩阵P和n级可逆矩阵Q,使得

$$PAQ=B. \tag{1}$$

定理 1 设数域K上$s\times n$矩阵A的秩为r.如果$r>0$,则A相抵于下述形式的矩阵

$$\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

称矩阵(2)为A的**相抵标准形**;如果$r=0$,则A相抵于零矩阵,此时称A的相抵标准形是零矩阵.

证明 设$r>0$.则A经过初等行变换化成的简化行阶梯形矩阵J有r个

非零行.再经过一些适当的两列互换,可以变成下述形式的矩阵 J_1:

$$J_1=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&c_{1,r+1}&\cdots&c_{1n}\\0&1&0&\cdots&0&c_{2,r+1}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&&&&&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&c_{r,r+1}&\cdots&c_{rn}\\0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&&&&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\tag{3}$$

把 J_1 的第1列的 $-c_{1,r+1},\cdots,-c_{1n}$ 倍分别加到第 $r+1,\cdots,n$ 列上;接着把 J_1 的第2列的 $-c_{2,r+1},\cdots,-c_{2n}$ 倍分别加到第 $r+1,\cdots,n$ 列上;…;最后把 J_1 的第 r 列的 $-c_{r,r+1},\cdots,-c_{rn}$ 倍分别加到第 $r+1,\cdots,n$ 列上,便得到下述形式的矩阵:

$$\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}.\tag{4}$$

因此,A 相抵于这个矩阵.

如果 $r=0$,则 $A=0$.从而 $A\overset{相抵}{\sim}0$. ∎

定理2　数域 K 上两个 $s\times n$ 矩阵 A 与 B 相抵当且仅当它们的秩相等.

证明　必要性.设 A 与 B 相抵,则 A 经过初等行变换和初等列变换变成 B.从而 A 与 B 的秩相等.

充分性.设 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=r$.如果 $r>0$,则

$$A\overset{相抵}{\sim}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad B\overset{相抵}{\sim}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

从而 $A\overset{相抵}{\sim}B$.如果 $r=0$,则 $A=B=0$.从而 A 与 B 相抵. ∎

从定理2看出,同一个相抵类里的矩阵有相同的秩,并且秩相同的矩阵在同一个相抵类里.因此有下述结论:

推论3　$M_{s\times n}$ 中,对于 $0\leqslant r\leqslant\min\{s,n\}$,秩为 r 的所有矩阵恰好组成一个相抵类.从而 $M_{s\times n}(K)$ 一共有 $1+\min\{s,n\}$ 个相抵类. ∎

特别地,$M_n(K)$ 一共有 $n+1$ 个相抵类.

由于同一个相抵类里的矩阵有相同的秩,因此我们称矩阵的秩是相抵不变量.又由于秩相同的矩阵在同一个相抵类里,因此矩阵的秩完全决定了相抵类.从而我们称矩阵的秩是相抵关系下的完全不变量.

一般地,设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系,一种量或一种表达式如果对于同一个等价类里的元素是相同的,则称这种量或表达式是一个**不变量**.恰好能完全决定等价类的一组不变量称为**完全不变量**.

从事实1和定理1立即得到

推论4 设数域 K 上 $s\times n$ 矩阵 A 的秩 $r>0$，则存在 K 上的 s 级、n 级可逆矩阵 P,Q，使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q. \tag{5}$$

把矩阵 A 表示成(5)式是非常有用的

习 题 5.2

1. 求下列矩阵的相抵标准形：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. 判别下列两个矩阵是否相抵：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 设 $s\times n$ 矩阵 A 的秩为 $r(r>0)$. 证明：存在 $s\times r$ 列满秩矩阵 P_1 与 $r\times n$ 行满秩矩阵 Q_1，使得

$$A=P_1Q_1.$$

4. 证明：任意一个秩为 $r(r>0)$ 的矩阵都可以表示成 r 个秩为1的矩阵之和.

5. 设 A,B 分别是 $s\times n,n\times m$ 矩阵，证明：

$$\operatorname{rank}(AB)\geqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n.$$

6. 设 C 是 $s\times r$ 列满秩矩阵，D 是 $r\times n$ 行满秩矩阵. 证明：$\operatorname{rank}(CD)=r$.

§3 广义逆矩阵

本节介绍矩阵的相抵标准形的一个重要应用.

我们知道，线性方程组 $AX=\beta$，如果它的系数矩阵 A 可逆，那么它有唯一解，并且用解矩阵方程的方法可写出这个解的简洁漂亮的公式：

$$X=A^{-1}\beta. \tag{1}$$

现在要问：如果 A 不可逆，但是 $AX=\beta$ 有解，那么它的解能否用类似于(1)式那样的简洁公式表达？为此我们先来分析可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的性质，以便受到启发.

如果 A 可逆，则有

$$AA^{-1}=I. \tag{2}$$

在(2)式的两边右乘 A，得

$$AA^{-1}A=A. \tag{3}$$

(3)式表明，A^{-1} 是矩阵方程 $AXA=A$ 的一个解. 容易看出，当 A 可逆时，矩阵方程 $AXA=A$ 一定有解，且解是唯一的，即为 A^{-1}.（理由：当 A 可逆时，在 $AXA=A$ 两边左乘 A^{-1}，右乘 A^{-1}，得 $X=A^{-1}$.）

从上述受到启发，当 A 不可逆时，为了找到 A^{-1} 的替代物，应当去找矩阵方程 $AXA=A$ 的解. 问题是：$AXA=A$ 一定有解吗？

定理 1　设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 非零矩阵，则矩阵方程

$$AXA=A \tag{4}$$

一定有解. 如果 $\operatorname{rank}(A)=r$，并且

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, \tag{5}$$

其中 P,Q 分别是 K 上 s 级、n 级可逆矩阵，则矩阵方程(4)的通解为

$$X=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}, \tag{6}$$

其中 B,C,D 分别是数域 K 上任意的 $r\times(s-r)$，$(n-r)\times r$，$(n-r)\times(s-r)$ 矩阵.

证明　如果 $X=G$ 是矩阵方程(4)的一个解，则

$$AGA=A. \tag{7}$$

把(5)式代入(7)式，得

$$P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QGP\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,$$

上式两边左乘 P^{-1}，右乘 Q^{-1}，得

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QGP\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

把 QGP 写成分块矩阵的形式：

$$QGP=\begin{array}{c} \\ r\{ \\ n-r\{ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \underline{r} & \underline{s-r} \end{array} \\ \begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}, \tag{9}$$

代入(8)式得

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

由此得出，$H = I_r$. 于是从(9)式推出

$$G = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}. \tag{11}$$

下面我们来证：对于任意的 $r \times (s-r)$，$(n-r)\times r$，$(n-r)\times(s-r)$ 矩阵 B, C, D，由(11)式给出的 G 确实是矩阵方程 $AXA = A$ 的解. 用 G 代替 X 后，方程的左边为

$$\begin{aligned} AGA &= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q \\ &= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q \\ &= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q \\ &= A. \end{aligned}$$

而方程(4)的右边也是 A，因此 G 是矩阵方程(4)的解. 这样我们就证明了矩阵方程 $AXA = X$ 一定有解，并且求出了它的通解是(6)式所表示的矩阵. ▌

定义 1 设 A 是数域 K 上 $s \times n$ 矩阵，矩阵方程 $AXA = A$ 的每一个解都称为 A 的一个**广义逆矩阵**，简称为 A 的**广义逆**，记作 A^-.

从定义 1 得出，对任意一个 A^-，都有

$$AA^-A = A. \tag{12}$$

从定理 1 得出，当 $A \neq 0$ 时，设 $\operatorname{rank}(A) = r$，且

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,$$

则

$$A^- = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}. \tag{13}$$

从定义 1 得出，任意一个 $n \times s$ 矩阵都是 $0_{s\times n}$ 的广义逆矩阵.

现在用矩阵的广义逆来讨论线性方程组的解.

一个线性方程组有解时，称它是**相容**的；否则称它是**不相容**的.

定理2（非齐次线性方程组的相容性定理） 非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 有解的充分必要条件是

$$\beta = AA^{-}\beta. \tag{14}$$

证明 必要性. 设 $AX=\beta$ 有解 α，则对任意一个 A^{-}，都有

$$\beta = A\alpha = AA^{-}A\alpha = AA^{-}\beta.$$

充分性. 设 $\beta = AA^{-}\beta$，则 $A^{-}\beta$ 是 $AX=\beta$ 的解. ▮

定理3（非齐次线性方程组的解的结构定理） 非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 有解时，它的通解为

$$X = A^{-}\beta, \tag{15}$$

其中 A^{-} 是 A 的任意一个广义逆.

证明 设 γ 是 $AX=\beta$ 的一个解，则 $A\gamma=\beta$. 我们要找一个 A^{-}，使得 $\gamma = A^{-}\beta$. 关键是在 A^{-} 的表达式(13)中选取合适的 B,C,D. 设

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, \tag{16}$$

则

$$P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q\gamma = \beta.$$

从而

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q\gamma = P^{-1}\beta \tag{17}$$

为了求 γ 的表达式，先来求 $Q\gamma$ 的表达式. 把 $Q\gamma$，$P^{-1}\beta$ 写成分块矩阵的形式：

$$Q\gamma = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \}\,r \\ \}\,n-r \end{array}, \qquad P^{-1}\beta = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}\,r \\ \}\,s-r \end{array}. \tag{18}$$

代入(17)式得

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

由此得出，$Y_1 = Z_1, 0 = Z_2$.

还需要写出 Y_2 的表达式. 由于 $\beta \neq 0$，因此 $P^{-1}\beta \neq 0$. 从而 $Z_1 \neq 0$. 设 $Z_1 = (k_1,\cdots,k_r)'$，其中 $k_i \neq 0$. 在 A^{-} 的表达式(13)中，取 C 为

$$C = (0,\cdots,0,k_i^{-1}Y_2,0,\cdots,0), \tag{20}$$

则

$$CZ_1 = (0,\cdots,0,k_t^{-1}Y_2,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_t\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}$$

$$= Y_2 \tag{21}$$

于是

$$Q\gamma = \begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Z_1\\ CZ_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_r & 0\\ C & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1\\ 0\end{pmatrix}$$

由此得出

$$\gamma = Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ C & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1\\ 0\end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ C & 0\end{pmatrix}P^{-1}\beta = A^-\beta,$$

其中 A^- 的表达式(13)中,$B=0,D=0,C$ 由(20)式所给 这证明了线性方程组 $AX=\beta$ 的任意一个解 γ 可以写成

$$\gamma = A^-\beta$$

反之,对于任意的 A^-,由于 $AX=\beta$ 有解,据定理 2 得,$\beta = AA^-\beta$,因此 $A^-\beta$ 是 $AX=\beta$ 的解

综上述得,$AX=\beta$ 有解时,它的通解是

$$X = A^-\beta,$$

其中 A^- 是 A 的任意一个广义逆 ▌

从定理 3 看出,任意非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 有解时,它的通解有简洁漂亮的形式:$X=A^-\beta$.这与 A 可逆时,$AX=\beta$ 的唯一解为 $X=A^{-1}\beta$ 相媲美.

一般情况下,矩阵方程 $AXA=A$ 的解不唯一,从而 A 的广义逆不唯一.但是有时我们希望 A 的满足特殊条件的广义逆是唯一的.这就引出下述概念.

定义 2 设 A 是复数域上 $s\times n$ 矩阵,下述矩阵方程组

$$\begin{cases} AXA = A,\\ XAX = X,\\ \overline{(AX)}' = AX,\\ (\overline{XA})' = XA,\end{cases}$$

称为 A 的 **Penrose 方程组**,它的解称为 A 的 **Moore-Penrose 广义逆**,记作 A^+.

可以证明:对于任意复矩阵 A,Penrose 方程组一定有解,而且解是唯一

的．因此 A 的 Moore-Penrose 广义逆存在且唯一．我们把证明写在《高等代数学习指导书(上册)》里．

习　题　5.3

1．设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵．证明：如果 A 行满秩，则对于 A 的任意一个广义逆 A^-，都有

$$AA^- = I_s.$$

2．设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵．证明：如果 A 列满秩，则对于 A 的任意一个广义逆 A^-，都有

$$A^- A = I_n.$$

3．设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵．证明：如果 A 行满秩，则对于 K 上任意一个 $s\times m$ 矩阵 B，矩阵方程 $AX = B$ 都有解，并且找出它的一些解．

4．设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵．证明：如果 A 列满秩，则对于 K 上任意一个 $m\times n$ 矩阵 H，矩阵方程 $XA = H$ 都有解，并且找出它的一些解．

§4　矩阵的相似

设 A 是方阵，你能求出 A^m 吗？如果有可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = D$，并且 D^m 容易计算，则

$$A^m = (PDP^{-1})^m = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^mP^{-1}.$$

于是 A^m 也就比较容易计算了．

为了寻找较简单的矩阵 D(D^m 容易计算)，就需要研究形如 $P^{-1}AP$ 的矩阵．为此我们引出下述概念．

定义 1　设 A 与 B 都是数域 K 上 n 级矩阵，如果存在数域 K 上的一个 n 级可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B, \tag{4}$$

则称 A 与 B 是相似的，记作 $A\sim B$．

从定义容易得出，数域 K 上 n 级矩阵之间的相似关系具有下列性质：

1°　反身性，即任一 n 级矩阵 A 与自身相似；

2°　对称性，即如果 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

3°　传递性，即如果 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$．

因此，相似是数域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$ 上的一个等价关系．

在相似关系下，A 的等价类称为 A 的**相似类**.

矩阵的相似对于矩阵的运算具有下面的性质：

命题 1 如果 $B_1 = P^{-1}A_1P, B_2 = P^{-1}A_2P$，则

$$B_1 + B_2 = P^{-1}(A_1 + A_2)P,$$

$$B_1B_2 = P^{-1}(A_1A_2)P,$$

$$B_1^m = P^{-1}A_1^mP,\text{其中 } m \text{ 是正整数}.$$

证明 直接计算可得结论. ▮

相似的矩阵有许多共同的性质：

1° 相似的矩阵其行列式的值相同.

证明 设 $A \sim B$，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$. 从而 $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A|$. ▮

2° 相似的矩阵或者都可逆，或者都不可逆；并且当它们可逆时，它们的逆矩阵也相似.

证明 由性质 1° 即得结论的前半部分.

现在设 $A \sim B$，且 A 可逆. 则有可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$. 从而

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

因此 $A^{-1} \sim B^{-1}$. ▮

3° 相似的矩阵有相同的秩.

证明 设 $A \sim B$，则有可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$. 从而 A 与 B 相抵，因此 A 与 B 的秩相等. ▮

n 级矩阵 A 的主对角线上元素的和称为 A 的**迹**，记作 $\mathrm{tr}(A)$.

矩阵的迹具有下列性质：

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B); \tag{5}$$

$$\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A); \tag{6}$$

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA). \tag{7}$$

(5)、(6) 式是显然的. (7) 式的证明如下：

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$，则

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)(i;i) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\Big),$$

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n}(BA)(k;k) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\Big),$$

因此，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. ▮

4° 相似的矩阵有相同的迹.

证明　设 $A \sim B$，则有可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$. 于是

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(P^{-1}(AP)) = \mathrm{tr}((AP)P^{-1}) = \mathrm{tr}(A). \qquad \blacksquare$$

性质 1°,3°,4° 表明：n 级矩阵的行列式，秩，迹都是相似关系下的不变量，简称为相似不变量.

本节开头的例子里，如果 A 能相似于一个比较简单的矩阵 D，譬如说对角矩阵 D，则 A^m 就容易计算了. 是不是任何一个方阵都能相似于一个对角矩阵？当能够相似于对角矩阵时，如何找可逆矩阵 P？

数域 K 上的 n 级矩阵 A 相似于对角矩阵 $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$

$\Longleftrightarrow$ 存在数域 K 上 n 级可逆矩阵 $P = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，使得

$P^{-1}AP = D$

即 $AP = PD$

即 $A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)D$

即 $(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)$

$\Longleftrightarrow$ K^n 中存在 n 个线性无关的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1,\quad A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2,\quad \cdots,\quad A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n.$$

于是我们证明了

定理 2　数域 K 上的 n 级矩阵 A 能够相似于对角矩阵的充分必要条件是：K^n 中有 n 个线性无关的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，以及 K 中有 n 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1,\quad A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2,\quad \cdots,\quad A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n. \tag{8}$$

这时，令 $P = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}. \qquad \blacksquare$$

如果一个 n 级矩阵 A 能够相似于对角矩阵 D，则称 A **可对角化**，把对角矩阵 D 称为 A 的**相似标准形**.

定理 2 告诉我们，找可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，关键是找出 n 个线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，它们满足(8)式. 下一节我们将介绍如何求这些向量.

习　题　5.4

1. 证明：如果 $A \sim B$，则 $kA \sim kB$，$A' \sim B'$.
2. 证明：如果 A 可逆，则 $AB \sim BA$.
3. 证明：如果 $A_1 \sim B_1$，$A_2 \sim B_2$，则

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

4. 证明：如果 A 与 B 可交换，则 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 也可交换.

5. 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ 是数域K上的一元多项式，设 A 是数域K上的 n 级矩阵，定义

$$f(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m.$$

显然 $f(A)$ 仍是数域 K 上的一个 n 级矩阵，称 $f(A)$ 是**矩阵 A 的多项式**. 证明：如果 $A \sim B$，则 $f(A) \sim f(B)$.

6. 证明：与单位矩阵 I 相似的矩阵只有 I 自己.

7. 证明：与数量矩阵 kI 相似的矩阵只有 kI 自己.

8. 证明：如果 A 可对角化，则 $A \sim A'$.

9. 证明：如果数域 K 上的 n 级矩阵 A,B 满足

$$AB - BA = A,$$

则 A 不可逆.

10. 证明：与幂等矩阵相似的矩阵仍是幂等矩阵.

11. 证明：与对合矩阵相似的矩阵仍是对合矩阵.

12. 方阵 A 称为**幂零矩阵**，如果 A 的某个正整数次幂等于零矩阵，使 $A^l = 0$ 成立的最小正整数 l 称为A 的**幂零指数**. 证明：与幂零矩阵相似的矩阵仍是幂零矩阵，并且其幂零指数相同.

§5 矩阵的特征值和特征向量

上一节最后，我们指出，对于一个 n 级矩阵A，能不能找到一个 n 级可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，关键在于能不能找到 n 个线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, \quad A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \quad \cdots, \quad A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n.$$

在几何中，在物理，化学，生物学等学科中，都会提出是否有向量 α 满足 $A\alpha = \lambda\alpha$ 的问题. 于是我们抽象出下述概念.

定义 1 设 A 是数域K上的n 级矩阵，如果 K^n 中有非零列向量α，使得

$$A\alpha = \lambda_0\alpha, \text{且 } \lambda_0 \in K, \tag{1}$$

则称 λ_0 是 A 的一个**特征值**，称 α 是A 的属于特征值λ_0 的一个**特征向量**.

例如，设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由于

$$A\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\alpha,$$

因此,2 是 A 的一个特征值,α 是 A 的属于特征值 2 的一个特征向量.

如果 α 是 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量,则

$$A\alpha = \lambda_0\alpha,$$

从而对于任意的 $k \in K$,有

$$A(k\alpha) = k(A\alpha) = k(\lambda_0\alpha) = \lambda_0(k\alpha).$$

因此 $k\alpha$ 也是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

设 σ 是平面上绕原点 O 的转角为 $\frac{\pi}{3}$ 的旋转,则 σ 可以用下述矩阵 A 表示:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

由于平面上任一非零向量在旋转 σ 下都不会变成它的倍数,因此在 $\mathbf{R}^2$ 中不存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 从而 A 没有特征值,没有特征向量.

如何判断数域 K 上的 n 级矩阵 A 是否有特征值和特征向量?如果有的话,怎样求 A 的全部特征值和特征向量?让我们先看一个例子.

设数域 K 上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

试问:A 是否有特征值和特征向量?

λ_0 是 A 的一个特征值,α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量

$\Longleftrightarrow A\alpha = \lambda_0\alpha, \alpha \neq 0, \lambda_0 \in K$

$\Longleftrightarrow (\lambda_0 I - A)\alpha = 0, \alpha \neq 0, \lambda_0 \in K$

$\Longleftrightarrow$ α 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的一个非零解,$\lambda_0 \in K$

$\Longleftrightarrow |\lambda_0 I - A| = 0$,$\alpha$ 是 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的一个非零解,$\lambda_0 \in K$. 由于

$$|\lambda_0 I - A| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - 1 & -2 \\ 1 & \lambda_0 - 4 \end{vmatrix} = \lambda_0^2 - 5\lambda_0 + 6, \tag{2}$$

因此

$$|\lambda_0 I - A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0^2 - 5\lambda_0 + 6 = 0$$

$\Longleftrightarrow$ λ_0 是多项式 $\lambda^2-5\lambda+6$ 的一个根.

我们把多项式 $\lambda^2-5\lambda+6$ 称为矩阵 A 的**特征多项式**.它是怎么得到的?从(2)式受到启发,有

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6.$$

因此矩阵 A 的特征多项式是 $|\lambda I-A|$.于是从上面的推导过程得出:

λ_0 是 A 的一个特征值,α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量

$\Longleftrightarrow$ λ_0 是 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 在 K 中的一个根,

α 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 I-A)X=0$ 的一个非零解.

上述推导过程对于任意 n 级矩阵 A 也适用.因此我们有

定理 1 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵,则

(1) λ_0 是 A 的一个特征值当且仅当 λ_0 是 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 在 K 中的一个根;

(2) α 是 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量当且仅当 α 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 I-A)X=0$ 的一个非零解. ▌

$A=(a_{ij})$ 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 写出来就是

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}. \qquad (3)$$

于是,判断数域 K 上 n 级矩阵 A 有没有特征值和特征向量,如果有的话,求 A 的全部特征值和特征向量的方法如下:

第一步,计算 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$;

第二步,判别多项式 $|\lambda I-A|$ 在数域 K 中有没有根.如果它在 K 中没有根,则 A 没有特征值,从而 A 也没有特征向量.如果 $|\lambda I-A|$ 在 K 中有根,则它在 K 中的全部根就是 A 的全部特征值,此时接着做第三步.

第三步,对于 A 的每一个特征值 λ_j,求齐次线性方程组 $(\lambda_j I-A)X=0$ 的一个基础解系:$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$.于是 A 的属于 λ_j 的全部特征向量组成的集合是

$$\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t \mid k_1,k_2,\cdots,k_t\in K,\text{且它们不全为 }0\}.$$

设 λ_j 是 A 的一个特征值,我们把齐次线性方程组 $(\lambda_j I-A)X=0$ 的解空间称为 A 的属于 λ_j 的**特征子空间**.它的全部非零向量就是 A 的属于 λ_j 的全部特征向量.注意:零向量不是特征向量.

例 1 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

是数域 K 上的矩阵.求 A 的全部特征值和特征向量.

解

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3),$$

因此 A 的全部特征值是2,3.

对于特征值2,解齐次线性方程组$(2I - A)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它的一般解是

$$x_1 = 2x_2,\text{其中 } x_2 \text{ 是自由未知量}.$$

从而它的一个基础解系是

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此,A 的属于2的全部特征向量是

$$\{k_1\alpha_1 \mid k_1 \in K \text{ 且 } k_1 \neq 0\}.$$

类似地,对于特征值3,求出$(3I - A)X = 0$的一个基础解为

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此,A 的属于3的全部特征向量是

$$\{k_2\alpha_2 \mid k_2 \in K \text{ 且 } k_2 \neq 0\}.$$

例2 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

是数域 K 上的矩阵,求 A 的全部特征值和特征向量.

解

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 & -4 \\ 0 & \lambda - 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda + 5 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda^2 + 3\lambda - 18) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 6),$$

因此 A 的全部特征值是 3(二重), -6.

对于特征值 3,解齐次线性方程组 $(3I - A)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它的一般解是

$$x_1 = -2x_2 + 2x_3, \quad x_2, x_3 \text{ 是自由未知量}.$$

从而它的一个基础解系是

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此 A 的属于 3 的全部特征向量是

$$\{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \mid k_1, k_2 \in K, \text{且 } k_1, k_2 \text{ 不全为 } 0\}.$$

对于特征值 -6,求出齐次线性方程组 $(-6I - A)X = 0$ 的一个基础解系为

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

因此 A 的属于 -6 的全部特征向量是

$$\{k_3\alpha_3 \mid k_3 \in K \text{ 且 } k_3 \neq 0\}.$$

例 3 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

如果把 A 看成实数域 $\mathbf{R}$ 上的矩阵,A 有没有特征值?如果把 A 看成复数域 $\mathbf{C}$ 上的矩阵,求 A 的全部特征值和特征向量.

解

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

由于判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$,因此 $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ 没有实根,从而实数域上的矩阵 A 没有特征值.

$\lambda^2 - 2\lambda + 2$ 两个虚根是 $1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}$. 这就是复数域上矩阵 A 的全部特征值.

对于特征值 $1 + \mathrm{i}$,求出齐次线性方程组 $[(1 + \mathrm{i})I - A]X = 0$ 的一个基础

解系为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此 A 的属于 $1+\mathrm{i}$ 的全部特征向量是

$$\{k_1\alpha_1 \mid k_1 \in \mathbf{C}, \text{且 } k_1 \neq 0\}.$$

A 的属于 $1-\mathrm{i}$ 的全部特征向量是

$$\{k_2\alpha_2 \mid k_2 \in \mathbf{C}, \text{且 } k_2 \neq 0\},$$

其中

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例1中 A 是2级矩阵，它的特征多项式 $\lambda^2-5\lambda+6$ 是2次多项式．2次项的系数为1；1次项的系数为

$$-5 = -\operatorname{tr}(A);$$

常数项为

$$6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = |A|.$$

这个规律对于任意 n 级矩阵 A 的特征多项式也成立吗？

对于 n 级矩阵 A，子式

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ i_1, i_2, \cdots, i_k \end{pmatrix}$$

称为 A 的 k 级**主子式**，$1 \leqslant k \leqslant n$．

命题2　设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，则 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 是 λ 的 n 次多项式．λ^n 的系数是1；λ^{n-1} 的系数等于 $-\operatorname{tr}(A)$；常数项为 $(-1)^n|A|$；λ^{n-k} 的系数为 A 的所有 k 级主子式的和乘以 $(-1)^k$，$1 \leqslant k < n$．

我们对于 $n=3$ 的情形写出证明，至于一般情形，证明方法是一样的．

设 $A=(a_{ij})$ 是3级矩阵，则

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & 0 - a_{13} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & 0 - a_{23} \\ 0 - a_{31} & 0 - a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

利用行列式的性质3，行列式(4)可以拆成下述8个行列式的和：

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{23} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}.$$

它们的值依次为

$$\lambda^3, -a_{33}\lambda^2, -a_{22}\lambda^2, -a_{11}\lambda^2,$$

$$(-1)^2 A\begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 2, & 3 \end{pmatrix}\lambda, (-1)^2 A\begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}\lambda, (-1)^2 A\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}\lambda, (-1)^3|A|.$$

因此 λ^3 的系数为 1;λ^2 的系数等于 $-\operatorname{tr}(A)$;λ 的系数等于

$$(-1)^2\left[A\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 1, & 3 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 2, & 3 \end{pmatrix}\right];$$

常数项等于 $(-1)^3|A|$. ▎

我们从研究 n 级矩阵 A 能不能相似于对角矩阵的问题,引出了矩阵的特征值和特征向量的概念.现在我们来看相似的矩阵其特征值有什么关系.

5° 相似的矩阵有相同的特征多项式.

证明 设 $A \sim B$,则有可逆矩阵 P,使得 $B = P^{-1}AP$.于是

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I)P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}||\lambda I - A||P| \\ &= |\lambda I - A|. \end{aligned}$$ ▎

从性质 5° 立即得出

6° 相似的矩阵有相同的特征值(包括重数相同). ▎

从性质 5°,6° 看出,矩阵的特征多项式和特征值都是相似不变量.

注意:特征多项式相同的两个 n 级矩阵不一定相似.例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

A 与 I 有相同的特征多项式 $(\lambda-1)^2$,但是 A 与 I 不相似.

习 题 5.5

1. 求数域 K 上的矩阵 A 的全部特征值和特征向量:

(1) $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$； (2) $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&8&2\\-2&-14&-3\end{pmatrix}$；

(3) $A=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{pmatrix}$； (4) $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$；

(5) $A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

2. 求复数域上的矩阵 A 的全部特征值和特征向量；如果把 A 看成实数域上的矩阵，它有没有特征值？有多少个特征值？

(1) $A=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$； (2) $A=\begin{pmatrix}3&7&-3\\-2&-5&2\\-4&-10&3\end{pmatrix}$.

3. 设 A 是实数域上的 n 级矩阵，把 A 看成复数域上的矩阵，如果 λ_0 是 A 的一个特征值，α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量，则 $\bar{\lambda}_0$ 也是 A 的一个特征值，$\bar{\alpha}$ 是 A 的属于 $\bar{\lambda}_0$ 的一个特征向量.($\bar{\alpha}$ 表示把 α 的每个分量取复数共轭得到的向量.)

4. 证明：数域 K 上的 n 级幂零矩阵的特征值都是 0.

5. 证明：数域 K 上的 n 级幂等矩阵一定有特征值，并且它的特征值是 1 或 0.

6. 方阵 A 如果满足 $A^m=I$(m 是某个正整数)，则称 A 是**周期矩阵**；使 $A^m=I$ 成立的最小正整数 m 称为 A 的**周期**. 证明：复数域上周期为 m 的周期矩阵的特征值都是 m 次单位根.(注：如果一个复数 z 满足 $z^m=1$，则称 z 是一个 m 次单位根.)

7. 证明：方阵 A 与 A' 有相同的特征多项式，从而它们有相同的特征值.

8. 设 A 是数域 K 上一个可逆矩阵，证明：

(1) 如果 A 有特征值，则 A 的特征值不等于 0；

(2) 如果 λ_0 是 A 的一个特征值，则 λ_0^{-1} 是 A^{-1} 的一个特征值.

9. 证明：方阵 A 的行列式等于零当且仅当 A 有特征值 0.

10. 设 A 是一个 n 级正交矩阵，证明：

(1) 如果 A 有特征值，则 A 的特征值是 1 或 -1；

(2) 如果 n 是奇数，且 $|A|=1$，则 1 是 A 的一个特征值；

(3) 如果 $|A|=-1$，则 -1 是 A 的一个特征值.

11. 设 λ_0 是数域 K 上 n 级矩阵 A 的一个特征值，证明：

(1) 对任意 $k\in K$，有 $k\lambda_0$ 是矩阵 kA 的一个特征值；

(2) 对任意正整数 m，有 λ_0^m 是矩阵 A^m 的一个特征值；

(3) 对于系数属于 K 的一元多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$，有 $f(\lambda_0)$ 是矩阵 $f(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_mA^m$ 的一个特征值.

12. 求下列复数域上矩阵的全部特征值和特征向量：

(1) $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$； (2) $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_3&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_1\end{pmatrix}$.

13. 设 A、B 分别是数域K上$s\times n$，$n\times s$矩阵，证明：AB与BA有相同的非零特征值.

§6 矩阵可对角化的条件

本章 §4 的定理 2 给出了数域 K 上 n 级矩阵A 能够相似于对角矩阵的充分必要条件是：K^n 中有 n 个线性无关的列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，以及 K 中有n 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\ A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,\ \cdots,\ A\alpha_n=\lambda_n\alpha,$$

这时，令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$$

现在用特征值和特征向量的术语可以把这个结论写成

定理 1 数域 K 上 n 级矩阵A 可对角化的充分必要条件是A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 此时令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

则
$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

其中 λ_i 是α_i 所属的特征值，$i=1,2,\cdots,n$. 此时称上述对角矩阵为 A 的**相似标准形**. 除了主对角线上元素的排列次序外，A 的相似标准形是唯一的. ▌

如何判断数域 K 上 n 级矩阵A 有没有 n 个线性无关的特征向量？

首先求出 n 级矩阵A 的全部特征值，设 A 的所有不同的特征值是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$. 然后对于每个特征值 λ_j，求出齐次线性方程组$(\lambda_jI-A)X=0$的一个基础解系：$\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{jr_j}$，它们是 A 的线性无关的特征向量. 自然会想：把这 m 组向量合在一起是否仍线性无关？我们来探讨这个问题.

定理 2 设λ_1,λ_2是数域 K 上n 级矩阵A 的不同的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 分别是A 的属于λ_1,λ_2 的线性无关的特征向量，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

证明 设

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r=0. \tag{1}$$

(1) 式两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1+\cdots+k_sA\alpha_s+l_1A\beta_1+\cdots+l_rA\beta_r=0,$$

从而有

$$k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+k_s\lambda_1\alpha_s+l_1\lambda_2\beta_1+\cdots+l_r\lambda_2\beta_r=0. \tag{2}$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因此 λ_1、λ_2 不全为 0. 不妨设 $\lambda_2\neq 0$. 在(1)式两边乘以 λ_2，得

$$k_1\lambda_2\alpha_1+\cdots+k_s\lambda_2\alpha_s+l_1\lambda_2\beta_1+\cdots+l_r\lambda_2\beta_r=0. \tag{3}$$

(2)式减去(3)式，得

$$k_1(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1+\cdots+k_s(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_s=0.$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因此从上式得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0. \tag{4}$$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，因此从(4)式得 $k_1=\cdots=k_s=0$. 把它们代人(1)式，得

$$l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r=0. \tag{5}$$

由于 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关，因此从(5)式得 $l_1=\cdots=l_r=0$. 从而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关. ∎

对于 A 的不同的特征值的数目作数学归纳法，可得到

定理 3　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是数域 K 上 n 级矩阵 A 的不同的特征值，$\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr_j}$ 是 A 的属于 λ_j 的线性无关的特征向量，$j=1,2,\cdots,m$. 则向量组

$$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{m1},\cdots,\alpha_{mr_m}$$

是线性无关的. ∎

推论 4　n 级矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的. ∎

从定理 3 得出，设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是数域 K 上 n 级矩阵 A 的所有不同的特征值，$\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr_j}$ 是齐次线性方程组 $(\lambda_jI-A)X=0$ 的一个基础解系，$j=1,2,\cdots,m$. 则 A 的特征向量组

$$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{m1},\cdots,\alpha_{mr_m} \tag{6}$$

一定线性无关. 如果 $r_1+\cdots+r_m=n$，则 A 有 n 个线性无关的特征向量，从而 A 可对角化. 如果 $r_1+\cdots+r_m<n$，则 A 没有 n 个线性无关的特征向量(理由见下面的注)，从而 A 不可以对角化.

注：假如 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$. 设 η_j 是属于特征值 λ_j 的特征向量，则 η_j 可以由 $\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr_j}$ 线性表出，从而 η_j 可以由向量组(6)线性表出. 因此向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 可以由向量组(6)线性表出. 于是

$$\mathrm{rank}\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}\leqslant\mathrm{rank}\{\text{向量组(6)}\}=r_1+\cdots+r_m<n,$$

这与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 线性无关矛盾.

从上面的议论得到

定理 5　数域 K 上 n 级矩阵 A 可对角化的充分必要条件是：A 的属于不

同特征值的特征子空间的维数之和等于 n. ▌

从定理 5 立即得到

推论 6　数域 K 上 n 级矩阵 A 如果有 n 个不同的特征值,则 A 可对角化. ▌

本章 §5 的例 1 中,2 级矩阵 A 有两个不同的特征值,因此 A 可对角化.

§5 的例 2 中,3 级矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,因此 A 可对角化.令

$$P=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-6\end{pmatrix}.$$

§5 的例 3 中,将 2 级矩阵 A 看成实数域上的矩阵,它没有特征值,从而它没有特征向量,因此它不能对角化.将 A 看成复数域上矩阵,它有两个不同的特征值,因此它可对角化.

习　题　5.6

1. 习题5.5的第1,2题中,哪些矩阵可对角化?哪些矩阵不能对角化?对于可对角化的矩阵 A,求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵,并且写出这个对角矩阵.

2. 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&0&a_{44}\end{pmatrix},$$

其中 $a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}$ 两两不同,判断 A 是否可对角化.

3. 求 A^m(m 是任一正整数):

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}$.

求 A^m(m 是任一正整数).

4. 证明:如果 α 与 β 是数域 K 上 n 级矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量,则 $\alpha+\beta$ 不是 A 的特征向量.

5. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵. 证明:如果 K^n 中任意非零列向量都是 A 的特征向量,则 A 一定是数量矩阵.

6. 证明:不为零矩阵的幂零矩阵不能对角化.

7. 证明:数域 K 上 n 级幂等矩阵 A 一定可对角化,并且 A 的相似标准形是 $\mathrm{diag}\{I_r,0\}$,其中 $r=\mathrm{rank}(A)$.

8. 证明:数域 K 上幂等矩阵的秩等于它的迹.

9. 证明:数域 K 上的对合矩阵一定可对角化;并且写出它的相似标准形.

10. 设 $A=(a_{ij})$ 是数域 K 上一个 n 级上三角矩阵,证明:如果 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$,并且至少有一个 $a_{kl}\neq 0(k<l)$,则 A 一定不能对角化.

*11. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵,λ_1 是 A 的一个特征值. 证明:A 的属于 λ_1 的特征子空间的维数不超过 λ_1 作为 A 的特征多项式的根的重数(我们把前者称为特征值 λ_1 的几何重数,后者称为 λ_1 的代数重数).

§7　实对称矩阵的对角化

设二次曲面 S 在直角坐标系 Ⅰ 中的方程为

$$x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz-1=0. \tag{1}$$

这是什么样的二次曲面呢?

解决这个问题的思路是:作直角坐标变换,使得在直角坐标系 Ⅱ 中,S 的方程不含交叉项,只含平方项,那么就可看出 S 是什么二次曲面. 设直角坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 T 一定是正交矩阵(理由可看丘维声编《解析几何(第二版)》第143页的定理4.7).(1)式左端的二次项部分可以写成

$$\begin{aligned}&x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz\\&=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3}$$

把(3)式右端的3级矩阵记作 A. 用公式(2)代入(3)式,得

$$(x^*,y^*,z^*)T'AT\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}. \tag{4}$$

为了使(4)式中不出现交叉项(即,x^*y^* 项,x^*z^* 项,y^*z^* 项),只要使矩阵 $T'AT$ 为对角矩阵.由于 $T'=T^{-1}$,因此也就是要使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.这就希望A能对角化,并且要找一个正交矩阵 T,使 A 对角化.注意 A 是实数域上的对称矩阵,于是提出了一个问题:对于实数域上的对称矩阵 A,能不能找到正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵?本节就来研究这个问题.

实数域上的矩阵简称为**实矩阵**,实数域上的对称矩阵简称为**实对称矩阵**.

如果对于 n 级实矩阵A,B,存在一个 n 级正交矩阵T,使得 $T^{-1}AT=B$,则称 A **正交相似**于B.

二次曲面方程的化简提出了一个问题:实对称矩阵 A 能不能正交相似于对角矩阵.如果能够,那么由于对角矩阵的主对角元都是 A 的特征值,因此 A 的特征多项式在复数域中的根全是实数.这是真的吗?

定理 1 实对称矩阵的特征多项式在复数域中的每一个根都是实数.

证明 设 A 是n 级实对称矩阵.设 λ_0 是 A 的特征多项式$|\lambda I-A|$ 在复数域中的任意一个根,于是$|\lambda_0 I-A|=0$.从而齐次线性方程组$(\lambda_0-A)X=0$ 有非零解.取它的一个非零解

$$\alpha=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}.$$

则$(\lambda_0 I-A)\alpha=0$.从而

$$A\alpha=\lambda_0\alpha. \tag{5}$$

想证 $\bar{\lambda}_0=\lambda_0$,于是在(5)式两边取复数共轭,得

$$\bar{A}\bar{\alpha}=\bar{\lambda}_0\bar{\alpha}, \tag{6}$$

由于 A 是实矩阵,因此 $\bar{A}=A$.从而(6)式也就是

$$A\bar{\alpha}=\bar{\lambda}_0\bar{\alpha}. \tag{7}$$

(7)式两边左乘 α',得

$$\alpha'A\bar{\alpha}=\bar{\lambda}_0\alpha'\bar{\alpha}. \tag{8}$$

由于 A 是对称矩阵,因此 $A'=A$.在(5)式两边取转置,然后用 $\bar{\alpha}$ 右乘,得

$$\alpha'A\bar{\alpha}=\lambda_0\alpha'\bar{\alpha}. \tag{9}$$

比较(8)、(9)两式,得

$$\bar{\lambda}_0\alpha'\bar{\alpha}=\lambda_0\alpha'\bar{\alpha}.$$

即

$$(\bar{\lambda}_0-\lambda_0)\alpha'\bar{\alpha}=0. \tag{10}$$

由于 $\alpha\neq 0$,因此

$$\alpha'\bar{\alpha} = c_1\bar{c}_1 + c_2\bar{c}_2 + \cdots + c_n\bar{c}_n$$
$$= |c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2 \neq 0.$$

于是从(10)式得，$\bar{\lambda}_0 - \lambda_0 = 0$. 即 $\bar{\lambda}_0 = \lambda_0$. 因此 λ_0 是实数. ∎

从定理1得出，实对称矩阵的特征多项式在复数域中的每一个根都是这个矩阵的特征值.

定理 2 实对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量是正交的.

证明 设 λ_1 与 λ_2 是 A 的不同特征值，α_i 是 A 的属于 λ_i 的特征向量，$i = 1,2$. 由于

$$\lambda_1(\alpha_1,\alpha_2) = (\lambda_1\alpha_1,\alpha_2) = (A\alpha_1,\alpha_2) = (A\alpha_1)'\alpha_2 = \alpha_1'A'\alpha_2 = \alpha_1'A\alpha_2,$$
$$\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2) = (\alpha_1,\lambda_2\alpha_2) = (\alpha_1,A\alpha_2) = \alpha_1'A\alpha_2,$$

因此 $\lambda_1(\alpha_1,\alpha_2) = \lambda_2(\alpha_1,\alpha_2)$. 于是 $(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1,\alpha_2) = 0$. 由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，因此 $(\alpha_1,\alpha_2) = 0$. 即 α_1 与 α_2 正交. ∎

定理 3 实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵.

证明 对于实对称矩阵的级数 n 作数学归纳法.

$n = 1$ 时，(a) 已经是对角矩阵，且 $I_1^{-1}(a)I_1 = (a)$.

假设任意一个 $n-1$ 级实对称矩阵都能正交相似于对角矩阵. 现在来看 n 级实对称矩阵 A.

取 A 的一个特征值 λ_1(这由定理1保证可取到)，取 A 的属于 λ_1 的一个特征向量 η_1，且 $|\eta_1| = 1$. η_1 可扩充成 $\mathbf{R}^n$ 的一个基(见第3章§4定理1后面的注)，然后经过施密特正交化和单位化，可得到 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基：$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$. 令

$$T_1 = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n),$$

则 T_1 是 n 级正交矩阵. 我们有

$$T_1^{-1}AT_1 = T_1^{-1}(A\eta_1,A\eta_2,\cdots,A\eta_n)$$
$$= (T_1^{-1}\lambda_1\eta_1, T_1^{-1}A\eta_2,\cdots,T_1^{-1}A\eta_n).$$

因为 $T_1^{-1}T_1 = I$，所以

$$T_1^{-1}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n).$$

于是得，$T_1^{-1}\eta_1 = \varepsilon_1$. 从而 $T_1^{-1}AT_1$ 的第1列是 $\lambda_1\varepsilon_1$. 因此可以设

$$T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

由于 T_1 是正交矩阵，A 是实对称矩阵，因此 $T_1^{-1}AT_1$ 也是实对称矩阵. 从而得，$\alpha = 0$，并且 B 是 $n-1$ 级实对称矩阵. 据归纳假设，有 $n-1$ 级正交矩阵

T_2,使得

$$T_2^{-1}BT_2=\operatorname{diag}\{\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}.$$

令

$$T=T_1\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix},$$

由于上式右端的两个矩阵都是 n 级正交矩阵,因此 T 是 n 级正交矩阵,并且有

$$\begin{aligned}T^{-1}AT&=\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix}^{-1}T_1^{-1}AT_1\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&T_2^{-1}BT_2\end{pmatrix}\\&=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}.\end{aligned}$$

据数学归纳法原理,对任意正整数 n,任一 n 级实对称矩阵都正交相似于对角矩阵. ∎

定理 3 告诉我们,对于 n 级实对称矩阵 A,一定能找到一个正交矩阵 T,使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.具体做法如下:

第一步,求 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$,它在复数域中的全部不同的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 都是实数,从而它们都是 A 的特征值.

第二步,对于每一个特征值 λ_j,求出齐次线性方程组 $(\lambda_jI-A)X=0$ 的一个基础解系 $\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr_j}$.然后把 $\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr_j}$ 进行施密特正交化和单位化,得 $\eta_{j1},\cdots,\eta_{jr_j}$.它们与 $\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr_j}$ 等价,因此它们也是 A 的属于 λ_j 的特征向量,并且它们是正交单位向量组.

第三步,令

$$T=(\eta_{11},\cdots,\eta_{1r_1},\cdots,\eta_{m1},\cdots,\eta_{mr_m}),$$

由于 A 可对角化,因此

$$r_1+\cdots+r_m=n.$$

从而 T 是 n 级矩阵.据定理 2 得,T 的列向量组是正交单位向量组,从而 T 是 n 级正交矩阵.由于 T 的列向量都是 A 的特征向量,因此

$$T^{-1}AT=\operatorname{diag}\{\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{r_1},\cdots,\underbrace{\lambda_m,\cdots,\lambda_m}_{r_m}\}.$$

例 1 设实数域上的 3 级对称矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix},$$

求正交矩阵 T,使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

解

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\0&-2\lambda+10&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1&10&4\\2&\lambda&2\\0&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}\lambda-1&10\\2&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)(\lambda^2-\lambda-20)=(\lambda-5)^2(\lambda+4).$$

因此 A 的全部特征值是 5(二重), -4.

对于特征值 5,求出齐次线性方程组 $(5I-A)X=0$ 的一个基础解系:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

令 $\quad \beta_1=\alpha_1,$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{pmatrix}.$$

令

$$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\sqrt{5}\\-\frac{2}{5}\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\qquad \eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{4}{15}\sqrt{5}\\\frac{2}{15}\sqrt{5}\\-\frac{1}{3}\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

对于特征值 -4,求出齐次线性方程组 $(-4I-A)X=0$ 的一个基础解系:

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

令
$$\eta_3 = \frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

令
$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

则 T 是正交矩阵,并且有
$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

习　题　5.7

1. 对于下述实对称矩阵 A,求正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;　　(4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. 证明:如果 n 级实对称矩阵 A, B 有相同的特征多项式,则 A 与 B 相似.

3. 证明:如果实矩阵 A 正交相似于对角矩阵,则 A 一定是对称矩阵.

4. 证明:如果 A 是 $s \times n$ 实矩阵,则 $A'A$ 的特征值都是非负实数.

5. 证明:如果 n 级实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数,则 A 一定正交相似于上三角矩阵.

6. 证明:如果 A 是实对称矩阵,并且 A 是幂零矩阵,则 $A = 0$.

7. 下列 n 级实矩阵是否可对角化?如果可对角化,求出一个可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(1) 元素全为 1 的矩阵 J;

(2) $A = -aI + bJ$,其中 $a \neq 0, b \neq 0$.

应用与实验课题:色盲遗传模型

考察某地区居民的色盲遗传情况.

每一个人都有23对染色体,其中22对是常染色体,1对是性染色体.男性的1对性染色体是(X,Y),女性的是(X,X).基因位于染色体上.在1对染色体的某一点位上的一对基因称为两个等位基因.显性的基因用A表示,隐性的基因用a表示.色盲基因是隐性的,且只位于X染色体上.如果女居民的1对性染色体的某一点位P上的两个等位基因是X^aX^a,则她患色盲;否则,她不患色盲.如果男居民的1对性染色体的某一点位P上的两个等位基因是X^aY,则他患色盲;否则,他不患色盲.

设N个女居民中,有N_1个人的点位P上的两个等位基因是X^AX^A,N_2个人是X^AX^a或X^aX^A,N_3个人是X^aX^a.则女居民的**色盲基因频率**(N个女居民的X染色体上色盲基因数目与她们的X染色体上等位基因的数目之比)为

$$\frac{1\cdot N_2+2N_3}{2N}=\frac{N_2}{2N}+\frac{N_3}{N}, \tag{1}$$

它大于女居民中色盲者的比例$\frac{N_3}{N}$.

类似地,设M个男居民中,有M_1个人的点位P上的两个等位基因是X^AY,M_2个人是X^aY,则男居民的**色盲基因频率**为

$$\frac{M_2}{M}, \tag{2}$$

它等于男居民中色盲者的比例.

某地区第i代男居民与女居民的色盲基因频率分别记作b_i,c_i,可以证明(我们把证明写在《高等代数学习指导书(上册)》里):

$$\begin{cases} b_i=c_{i-1}, \\ c_i=\dfrac{1}{2}(b_{i-1}+c_{i-1}), \end{cases} \tag{3}$$

其中$i=2,3,\cdots$.即,男居民的色盲基因频率等于上一代的女居民的色盲基因频率;而女居民的色盲基因频率等于上一代的男、女居民的色盲基因频率的算术平均数.

1. 已知b_1,c_1,求b_n,c_n.
2. 设$b_1=0.1$, $c_1=0.05$,求b_7,c_7.
3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.
4. 经过许多代以后,该地区男色盲者的比例与女色盲者的比例哪个大?

第6章　二次型·矩阵的合同

在第5章 §7 的开头，我们指出，二次曲面 S 在直角坐标系 I 中的方程为

$$x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz-1=0, \tag{1}$$

为了判别 S 是什么样的二次曲面，应当作直角坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 T 是正交矩阵，使得在新的直角坐标系中，方程(1)左端的二次项部分

$$\begin{aligned} & x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz \\ = & (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ = & (x,y,z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3}$$

变成

$$(x^*,y^*,z^*)T'AT\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 $T'AT$ 为对角矩阵，从而(4)式只含 ${x^*}^2, {y^*}^2, {z^*}^2$ 项，于是可判别 S 是什么样的二次曲面.

(3)式的每一项都是2次，即(3)式是 x,y,z 的二次齐次多项式，称它为 x,y,z 的二次型. 上述问题表明，需要研究二次型在像(2)式那样的变量替换下，变成只含平方项的二次型. 本章就来对一般的二次型研究这样的问题.

§1　二次型和它的标准形

下述多项式有什么共同点?

$$x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz,$$
$$x^2-y^2,$$
$$x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3,$$
$$x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3.$$

上述每一个多项式中，每一项都是2次的.

定义1　系数在数域 K 中的 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个二次齐次多项式，称为数域 K 上的一个 **n 元二次型**，它的一般形式是

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\ & a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ & +a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ & +\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ & +a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \tag{1}$$

(1)式也可以写成

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= & \ a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\ & +a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ & +\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ & +a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ = & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $a_{ji}=a_{ij}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$.

把(2)式中的系数排成一个 n 级矩阵 A(注意 $a_{ji}=a_{ij}$)：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

把 A 称为**二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵**. 它是对称矩阵. 显然，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵是唯一的：它的主对角元依次是 $x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2$ 的系数；它的 (i,j) 元是 x_ix_j 的系数的一半，其中 $i\neq j$. 令

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

则二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可以写成：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX, \tag{5}$$

其中 A 是二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵.

令

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}, \tag{6}$$

设 C 是数域 K 上的一个 n 级可逆矩阵，下述关系式

$$X=CY \tag{7}$$

称为变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个**非退化线性替换**.

n 元二次型 $X'AX$ 经过非退化线性替换 $X=CY$ 变成

$$(CY)'A(CY)=Y'(C'AC)Y \tag{8}$$

记 $B=C'AC$，则(8)式可写成 $Y'BY$，这是变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个二次型.由于

$$B'=(C'AC)'=C'A'(C')'=C'AC. \tag{9}$$

因此 B 也是对称矩阵.于是二次型 $Y'BY$ 的矩阵正好是 B.

由此受到启发，引出下述两个概念：

定义 2　数域 K 上两个 n 元二次型 $X'AX$ 与 $Y'BY$，如果存在一个非退化线性替换 $X=CY$，把 $X'AX$ 变成 $Y'BY$，则称二次型 $X'AX$ 与 $Y'BY$ **等价**，记作 $X'AX\cong Y'BY$.

定义 3　数域 K 上两个 n 级矩阵 A 与 B，如果存在 K 上的一个可逆矩阵 C，使得

$$C'AC=B, \tag{10}$$

则称 A 与 B **合同**，记作 $A\simeq B$.

从(8)式容易看出：

命题 1　数域 K 上两个 n 元二次型 $X'AX$ 与 $Y'BY$ 等价当且仅当 n 级对称矩阵 A 与 B 合同.　▌

容易验证，n 元二次型的等价，以及 n 级矩阵的合同都满足反身性，对称性，传递性.从而合同是集合 $M_n(K)$ 上的一个等价关系.在合同关系下，A 的等价类称为 A 的**合同类**.

本章研究的基本问题是，数域 K 上 n 元二次型能不能等价于一个只含平方项的二次型？容易看出，二次型只含平方项当且仅当它的矩阵是对角矩阵.

因此用矩阵的术语,研究的基本问题就是,数域 K 上的 n 级对称矩阵能不能合同于一个对角矩阵?

如果二次型 $X'AX$ 等价于一个只含平方项的二次型,则这个只含平方项的二次型称为 $X'AX$ 的一个**标准形**.

如果对称矩阵 A 合同于一个对角矩阵,则称这个对角矩阵是 A 的**合同标准形**.

对于实数域上的 n 级对称矩阵 A,在第五章 §7 的定理 3 已经证明:存在一个 n 级正交矩阵 T,使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵,并且其主对角元是 A 的全部特征值,由于 $T^{-1}=T'$,因此 $T'AT$ 为对角矩阵,即 A 合同于对角矩阵.从而实数域上的 n 元二次型 $X'AX$ 一定等价于只含平方项的二次型,而且能找到正交矩阵 T,使得经过变量的替换 $X=TY$,把二次型 $X'AX$ 化成一个标准形:

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2, \tag{11}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值.

如果 T 是正交矩阵,则变量的替换 $X=TY$ 称为**正交替换**.

例 1 二次曲面 S 在直角坐标系 I 中的方程为

$$x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz-1=0, \tag{12}$$

作直角坐标变换,把它化成标准方程,并且指出 S 是什么二次曲面.

解 首先把方程(12)左端的二次项部分

$$f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz \tag{13}$$

经过正交替换化成标准形.二次型(13)的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}. \tag{14}$$

据第 5 章 §7 的例 1,找到了正交矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\sqrt{5}&\frac{4}{15}\sqrt{5}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{5}\sqrt{5}&\frac{2}{15}\sqrt{5}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}\sqrt{5}&\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

使得 $T^{-1}AT=\mathrm{diag}\{5,5,-4\}$.于是作正交替换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}, \tag{15}$$

可以把二次型(13)化成下述标准形：

$$f(x,y,z)=5x^{*^2}+5y^{*^2}-4z^{*^2} \tag{16}$$

因此，作直角坐标变换(15)，二次曲面 S 在新的直角坐标系中的方程为

$$5x^{*^2}+5y^{*^2}-4z^{*^2}=1. \tag{17}$$

由此看出，S 是单叶双曲面.

任一数域 K 上的二次型是否也等价于只含平方项的二次型？即，任一数域 K 上的对称矩阵是否也合同于对角矩阵？对于实数域上的二次型，能不能不作正交替换，而作一般的非退化线性替换化成标准形？让我们先看两个具体例子：

例 2 作非退化线性替换把数域 K 上的下述二次型化成标准形，并且写出所作的非退化线性替换：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$;

(2) $g(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3$.

解 (1) 用配方法把变量 x_1,x_2,x_3 逐个地配成完全平方的形式：

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3\\
&=x_1^2+4x_1(x_2-x_3)+[2(x_2-x_3)]^2-[2(x_2-x_3)]^2\\
&\quad+2x_2^2-x_3^2-4x_2x_3\\
&=[x_1+2(x_2-x_3)]^2-4(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2)+2x_2^2-x_3^2-4x_2x_3\\
&=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2x_2^2+4x_2x_3-5x_3^2\\
&=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2-x_3^2)-5x_3^2\\
&=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2(x_2-x_3)^2-3x_3^2.
\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2-2x_3,\\ y_2=\qquad x_2-x_3,\\ y_3=\qquad\qquad x_3,\end{cases}$$

则
$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-2y_2^2-3y_3^2.$$

所作的线性替换是

$$\begin{cases}x_1=y_1-2y_2,\\ x_2=\quad y_2+y_3,\\ x_3=\qquad y_3,\end{cases}$$

其系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

因此这个线性替换是非退化的.

(2) 为了能够配方,首先要变成有平方项.为此令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = \qquad y_3, \end{cases} \tag{18}$$

则

$$\begin{aligned} & f(x_1,x_2,x_3) \\ = & (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 - 3(y_1 + y_2)y_3 \\ = & y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3 \\ = & y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2 - [y_2^2 + 4y_2y_3 + (2y_3)^2 - (2y_3)^2] \\ = & (y_1 - y_3)^2 - y_3^2 - (y_2 + 2y_3)^2 + 4y_3^2 \\ = & (y_1 - y_3)^2 - (y_2 + 2y_3)^2 + 3y_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \quad - y_3, \\ z_2 = y_2 + 2y_3, \\ z_2 = \qquad y_3, \end{cases} \tag{19}$$

则
$$f(x_1,x_2,x_3) = z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2.$$

为了写出所作的线性替换,先从(19)解出 y_1,y_2,y_3,得

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \quad + z_3, \\ y_2 = z_2 - 2z_3, \\ y_3 = \qquad z_3. \end{cases} \tag{20}$$

把(20)代入(18)式,得

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 + 3z_3, \\ x_2 = z_1 + z_2 \quad - z_3, \\ x_3 = \qquad\qquad z_3. \end{cases} \tag{21}$$

容易看出,线性替换(21)的系数矩阵的行列式不等于0,因此它是非退化的.

例1和例2中所用的配方法能够把任一数域 K 上的每一个二次型经过非退化性替换变成只含平方项的二次型.这可以对二次型的变量个数 n 作数学归纳法予以证明.

下面我们采用另一种证法，证明数域 K 上的任一 n 级对称矩阵一定合同于对角矩阵，从而数域 K 上的任一 n 元二次型一定等价于只含平方项的二次型.

设 A,B 都是数域 K 上的 n 级矩阵，则

$A \simeq B \Longleftrightarrow$ 存在 K 上可逆矩阵 C，使得 $C'AC = B$

$\Longleftrightarrow$ 存在 K 上初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_t$，使得

$$C = P_1P_2\cdots P_t, \tag{22}$$

$$P_t'\cdots P_2'P_1'AP_1P_2\cdots P_t = B \tag{23}$$

初等矩阵有三种类型：$P(j,i(k))$，$P(i,j)$，$P(i(b))$，其中 $b \neq 0$. 它们的转置矩阵分别为

$$P(j,i(k))' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= P(i,j(k)); \tag{24}$$

$$P(i,j)' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= P(i,j); \tag{25}$$

$$P(i(b))' = P(i(b)). \tag{26}$$

因此

$$P(j,i(k))'A\,P(j,i(k)) = P(i,j(k))A\,P(j,i(k)), \tag{27}$$

即，对 A 进行了下述初等行变换和初等列变换：

$$A \xrightarrow{ⓘ+ ⓙ\cdot k} P(i,j(k))A \xrightarrow[ⓘ+ ⓙ\cdot k]{} P(i,j(k))A\,P(j,i(k)).$$

像这种初等行变换与初等列变换都是ⓘ+ ⓙ$\cdot k$，称为**成对初等行、列变换**.

$$P(i,j)'A\,P(i,j) = P(i,j)A\,P(i,j), \tag{28}$$

即，先把 A 的第 i,j 行互换，接着把所得矩阵的第 i,j 列互换. 这也是成对初等行、列变换.

$$P(i(b))'A\,P(i(b)) = P(i(b))A\,P(i(b)), \tag{29}$$

即，先把 A 的第 i 行乘以非零数 b，接着把所得矩阵的第 i 列乘以 b. 这也是成对的初等行、列变换.

从(23)式和(22)式(可写成 $C = IP_1P_2\cdots P_t$) 得到.

引理 1 设 A,B 都是数域 K 上的矩阵，则 A 合同于 B 当且仅当 A 经过 K 上的一系列成对初等行、列变换可以变成 B，并且对 I 只作其中的初等列变换得到的可逆矩阵 C，就使得 $C'AC = B$. ▌

现在我们来证明本节的主要结论：

定理 2 数域 K 上任一对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

证明 对于数域 K 上对称矩阵的级数 n 作数学归纳法

$n = 1$ 时， $(a) \simeq (a)$.

假设 $n-1$ 级对称矩阵都合同于对角矩阵，现在来看 n 级对称矩阵 $A = (a_{ij})$.

情形 1 $a_{11} \neq 0$. 把 A 写成分块矩阵的形式，并且作分块矩阵的初等行(列)变换：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha' & A_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{② + (-a_{11}^{-1}\alpha')\cdot ①} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ 0 & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[② + ①\cdot(-a_{11}^{-1}\alpha)]{} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha \end{pmatrix}$$

记 $A_2 = A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha$. 则从上述得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\alpha' & I_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha' & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

由于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\alpha' & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}',$$

因此从(30)式得出

$$A \simeq \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

由于 $A_2' = (A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha)' = A_1' - a_{11}^{-1}\alpha'(\alpha')' = A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha = A_2$，因此 A_2

是 $n-1$ 级对称矩阵. 据归纳假设, 存在 K 上 $n-1$ 级可逆矩阵 C_2, 使得 $C'_2A_2C_2 = D_2$, 其中 D_2 是对角矩阵, 从而

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

因此

$$A \simeq \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}.$$

情形 2　$a_{11} = 0$, 存在 $a_{ii} \neq 0$.

把 A 的第 $1, i$ 行互换, 接着把所得矩阵的第 $1, i$ 列互换, 得到的矩阵 B 其 $(1,1)$ 元为 a_{ii}. 据情形 1 的结论, $B \simeq D$, 其中 D 是对角矩阵. 据引理 1 得, $A \simeq B$. 因此 $A \simeq D$.

情形 3　$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$, 存在 $a_{ij} \neq 0, i \neq j$.

把 A 的第 j 行加到第 i 行上, 接着把所得矩阵的第 j 列加到第 i 列上, 得到的矩阵 H 其 (i,i) 元为 $2a_{ij}$. 据情形 2 的结论, $H \simeq D$, 其中 D 为对角矩阵. 据引理 1 得, $A \simeq H$. 因此 $A \simeq D$.

情形 4　$A = 0$, 结论显然成立.

根据数学归纳法原理, 对一切正整数 n, 都有数域 K 上的任一 n 级对称矩阵合同于一个对角矩阵. ▌

从定理 2 立即得到

定理 3　数域 K 上任意一个二次型都等价于一个只含平方项的二次型. ▌

利用引理 1 和定理 2、定理 3, 可以得到求二次型的标准形的又一种方法: 对于数域 K 上 n 元二次型 $X'AX$,

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对 } I \text{ 只作其中的初等列变换}]{\text{对 } A \text{ 作成对初等行、列变换}} \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}, \tag{31}$$

其中 D 是对角矩阵 $\operatorname{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$, 则

$$C'AC = D,$$

令 $X = CY$, 则得到 $X'AX$ 的一个标准形

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2. \tag{32}$$

这种求标准形的方法称为**矩阵的成对初等行、列变换法**.

例 3　用矩阵的成对初等行、列变换法把数域 K 上下述二次型化成标准形, 并且写出所作的非退化线性替换:

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

解 $g(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{①+②\cdot 1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[①+②\cdot 1]{}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ -1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+①\cdot(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & -\frac{1}{4} & -1\\ -1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[②+①\cdot(-\frac{1}{2})]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -\frac{1}{4} & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+①\cdot 1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -\frac{1}{4} & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[③+①\cdot 1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+②\cdot(-4)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&-1\\0&0&3\\1&-\frac{1}{2}&1\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{③+②\cdot(-4)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&3\\1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&3\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

令 $X=CY$,得

$$g(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2+3y_3^2.$$

所作的非退化线性替换 $X=CY$ 详细写出来就是

$$\begin{cases}x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2+3y_3,\\x_2=y_1+\frac{1}{2}y_2-y_3,\\x_3=y_3.\end{cases}$$

比较例 3 和例 2 的结果可看出,同一个二次型,其标准形不唯一.但是标准形中系数不为 0 的平方项的个数相同.其理由如下:设 $X'AX$ 经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2$,则 $C'AC=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0\}$.因此 $\mathrm{rank}(A)=r$.这表明:二次型 $X'AX$ 的标准形中系数不为 0 的平方项个数 r 等于它的矩阵 A 的秩,因而是唯一的.今后我们把二次型 $X'AX$ 的矩阵 A 的秩就称为**二次型 $X'AX$ 的秩**.

习 题 6.1

1. 用正交替换把下列实二次型化成标准形:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2,+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$.

2. 作直角坐标变换,把下述二次曲面的方程化成标准方程,并且指出它是什么二次曲面:

$$2x^2+6y^2+2z^2+8xz-1=0.$$

3. 作非退化线性替换把下列数域 K 上二次型化成标准形,并且写出所作的非退化线性替换:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_3x_4$.

4. 证明:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

5. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵,证明:A 是斜对称矩阵当且仅当对于 K^n 中任一列向量 α,有 $\alpha' A\alpha=0$.

6. 设 A 是数域 K 上的 n 级对称矩阵.证明:如果对于 K^n 中任一列向量 α,都有 $\alpha' A\alpha=0$,则 $A=0$.

7. 证明:秩为 r 的对称矩阵可以表示成 r 个秩为 1 的对称矩阵之和.

8. 用矩阵的成对初等行、列变换法把数域 K 上的下述二次型化成标准形,并且写出所作的非退化线性替换:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

9. 证明:数域 K 上的斜对称矩阵一定合同于下述形式的分块对角矩阵:

$$\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},(0),\cdots,(0)\right\}.$$

10. 证明:斜对称矩阵的秩一定是偶数.

*11. 设 n 级实对称矩阵 A 的全部特征值按大小顺序排成:$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$.证明:对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一列向量 $\alpha\neq 0$,都有

$$\lambda_n\leqslant\frac{\alpha' A\alpha}{|\alpha|^2}\leqslant\lambda_1.$$

*12. 设 A 是一个 n 级实对称矩阵,证明:存在一个正实数 c,使得对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一列向量 α,都有 $|\alpha' A\alpha|\leqslant c\alpha'\alpha$.

*13. 设 A,B 都是 n 级实对称矩阵,并且 $AB=BA$.证明:存在一个 n 级正交矩阵 T,使得 $T'AT$ 与 $T'BT$ 都为对角矩阵.

*14. 设 n 元实二次型 $x'AX$ 的一个特征值是 λ_1,证明:存在 $\mathbf{R}^n$ 中非零向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$,使得

$$\alpha' A\alpha = \lambda_i(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

§2 实二次型的规范形

本章 §1 的例 2 与例 3 表明,同一个二次型 $g(x_1,x_2,x_3)$,它的标准形不唯一:$z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2$,$y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + 3y_3^2$.但是标准形中系数不为零的平方项的个数相同,并且系数为正的平方项的个数相同.前者对于任何数域 K 上的二次型都成立.后者是否成立?本节将证明后者对于实数域上的二次型是成立的.

实数域上的二次型,简称为实二次型.

n 元实二次型 $X'AX$ 经过一个适当的非退化线性替换 $X = CY$ 可以化成下述形式的标准形:

$$d_1y_1^2 + \cdots + d_py_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \cdots - d_ry_r^2, \tag{1}$$

其中 $d_i > 0, i = 1,2,\cdots,r$;并且 r 是这个二次型的秩.因为正实数总可以开平方,所以可以再作一个非退化线性替换:

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}}z_i, \quad i = 1,2,\cdots,r,$$

$$y_j = z_j, \quad j = r+1,\cdots,n.$$

则二次型(1)可以变成

$$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2. \tag{2}$$

因此实二次型 $X'AX$ 有形如(2)式的标准形,称它为 $X'AX$ 的**规范形**,它的特点是:只含平方项,且平方项的系数为 1, −1 或 0;系数为 1 的平方项都写在前面.实二次型 $X'AX$ 的规范形被两个自然数 p 和 r 决定.$X'AX$ 的规范形是不是唯一呢?回答是肯定的.

定理 1(惯性定理) n 元实二次型 $X'AX$ 的规范形是唯一的.

证明 设 n 元实二次型 $X'AX$ 的秩为 r.假设它分别经过非退化线性替换 $X = CY$,$X = BZ$ 变成两个规范形:

$$X'AX = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2, \tag{3}$$

$$X'AX = z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2. \tag{4}$$

我们来证明 $p = q$,从而 $X'AX$ 的规范形唯一.

从(3)式和(4)式看出,经过非退化线性替换 $Z = (B^{-1}C)Y$,有

$$z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2 = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2. \tag{5}$$

记 $G = B^{-1}C = (g_{ij})$.假如 $p > q$,我们想找到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 取的一组

值,使得(5)式右端大于0,而左端小于或等于0,从而产生矛盾.为此令

$$(y_1,\cdots,y_p,y_{p+1},\cdots,y_n)=(k_1,\cdots,k_p,0,\cdots,0),\tag{6}$$

其中 $k_1,\cdots,k_p$ 是待定的不全为0的实数,并且使变量 $z_1,\cdots,z_q$ 取的值全为0.由于

$$\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_q\\ z_{q+1}\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n}\\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1\\ \vdots\\ k_p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{cases} z_1=g_{11}k_1+\cdots+g_{1p}k_p,\\ z_2=g_{21}k_1+\cdots+g_{2p}k_p,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ z_q=g_{q1}k_1+\cdots+g_{qp}k_p.\end{cases}\tag{7}$$

为了使 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 取的值为0,我们考虑齐次线性方程组:

$$\begin{cases} g_{11}k_1+\cdots+g_{1p}k_p=0,\\ g_{21}k_1+\cdots+g_{2p}k_p=0,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ g_{q1}k_1+\cdots+g_{qp}k_p=0.\end{cases}\tag{8}$$

由于 $q<p$,因此齐次线性方程组(8)有非零解.于是 $k_1,\cdots,k_p$ 可以取到一组不全为0的实数,使得 $z_1=0,\cdots,z_q=0$.此时(5)式左端小于或等于0,而右端大于0,矛盾.因此 $p\leqslant q$.同理可证 $q\leqslant p$.从而 $p=q$. ▍

定义1 在实二次型 $X'AX$ 的规范形中,系数为 $+1$ 的平方项的数目 p 称为 $X'AX$ 的**正惯性指数**,系数为 -1 的平方项的数目 $r-p$ 称为 $X'AX$ 的**负惯性指数**;正惯性指数减去负惯性指数所得的差 $2p-r$ 称为 $X'AX$ 的**符号差**.

由上述知,实二次型 $X'AX$ 的规范形被它的秩和正惯性指数决定.利用二次型等价的传递性和对称性立即得出

命题2 两个 n 元实二次型等价

$\Longleftrightarrow$ 它们的规范形相同

$\Longleftrightarrow$ 它们的秩相等,并且正惯性指数也相等. ▍

从实二次型 $X'AX$ 经过非退化线性替换化成规范形的过程中看到,$X'AX$

的任一标准形中系数为正的平方项数目等于 $X'AX$ 的正惯性指数，系数为负的平方项数目等于 $X'AX$ 的负惯性指数. 从而虽然 $X'AX$ 的标准形不唯一，但是标准形中系数为正（或负）的平方项数目是唯一的.

从惯性定理得出

推论 3 任一 n 级实对称矩阵 A 合同于一个主对角元只有 $1,-1,0$ 的对角矩阵 $\mathrm{diag}[1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0]$，其中 1 的个数等于 $X'AX$ 的正惯性指数，-1 的个数等于 $X'AX$ 的负惯性指数（分别把它们称为 A 的正惯性指数，负惯性指数）. 这个对角矩阵称为 A 的**合同规范形**. ▌

容易看出，n 级实对称矩阵 A 的合同标准形中，主对角元为正（负）数的数目等于 A 的正（负）惯性指数.

从命题 2 立即得出

推论 4 两个 n 级实对称矩阵合同

$\Longleftrightarrow$ 它们的秩相等，并且正惯性指数也相等. ▌

推论 4 表明，秩和正惯性指数恰好完全决定 n 级实对称矩阵的合同类. 因此由所有 n 级实对称矩阵组成的集合中，秩和正惯性指数是合同关系下的完全不变量.

例 1 2 级实对称矩阵组成的集合有多少个合同类？每一类里写出一个最简单的矩阵（即合同规范形）.

解 2 级实对称矩阵的秩有 3 种可能：0，1，2

秩为 0 的矩阵只有零矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

秩为 1 的 2 级实对称矩阵，其正惯性指数有 2 种可能：0，1. 它们各成一类，合同规范形分别为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

秩为 2 的 2 级实对称矩阵，其正惯性指数有 3 种可能：0，1，2. 它们各成一类，合同规范形分别为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

综上所述，总共可分成 6 个合同类.

习 题 6.2

1. 把习题 6.1 的第 3 题的所有实二次型的标准形进一步化成规范形，并且写出所作的

非退化线性替换.

2. 3级实对称矩阵组成的集合有多少个合同类?每一类里写出一个最简单的矩阵(即合同规范形).

3. n 级实对称矩阵组成的集合有多少个合同类?

4. 设 $X'AX$ 是一个 n 元实二次型,证明:如果 $\mathbf{R}^n$ 中有列向量 α_1,α_2,使得 $\alpha_1'A\alpha_1>0$, $\alpha'_2A\alpha_2<0$,则 $\mathbf{R}^n$ 中有非零列向量 α_3,使得 $\alpha'_3A\alpha_3=0$.

5. 设 A 为一个 n 级实对称矩阵,证明:如果 $|A|<0$,则在 $\mathbf{R}^n$ 中有非零列向量 α,使得 $\alpha'A\alpha<0$.

6. 证明:一个 n 元实二次型可以分解成两个实系数1次齐次多项式的乘积当且仅当它的秩等于2,并且符号差为0,或者它的秩等于1.

7. 证明:复数域上 n 元二次型(简称为复二次型)$X'AX$ 能经过非退化线性替换化成下述形式的标准形:

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2,$$

其中 r 是二次型 $X'AX$ 的秩.这种形式的标准形称为 $X'AX$ 的规范形,它只含平方项,且平方项的系数为1或0.

*8. 设实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+u}^2,$$

其中 $l_i(i=1,2,\cdots,s+u)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的1次齐次多项式.证明:$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数 $p\leqslant s$,负惯性指数 $q\leqslant u$.

§3 正定二次型与正定矩阵

一元二次函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处达到最小值,这是因为对任意实数 $a\neq0$,都有 $f(a)=a^2>0$,而 $f(0)=0$.这个例子表明,一元二次函数 $f(x)=x^2$ 的最小值问题与一元二次型 x^2 的性质密切相关.一般地,n 元函数的极值问题是否也与 n 元实二次型的性质有关系?与 n 元实二次型的什么样的性质有关?本节就来研究这个问题.

定义1 n 元实二次型 $X'AX$ 称为**正定的**,如果对 $\mathbf{R}^n$ 中任意非零列向量 α,都有 $\alpha'A\alpha>0$.

例如,3元实二次型

$$X'AX=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

是正定的.

3元实二次型

$$X'BX=x_1^2+x_2^2$$

不是正定的，因为对于 $\alpha = (0,0,1)'$，有 $\alpha' B\alpha = 0$.

3 元实二次型

$$X'DX = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

也不是正定的. 因为对于 $\alpha = (0,0,1)'$，有 $\alpha' D\alpha = -1$.

由上述 3 个例子受到启发，猜想有下述结论：

定理 1 n 元实二次型 $X'AX$ 是正定的充分必要条件为它的正惯性指数等于 n.

证明 必要性. 设 $X'AX$ 是正定的. 作非退化线性替换 $X = CY$，化成规范形. 即

$$X'AX \xlongequal{X = CY} y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

如果 $p < n$，则 y_n^2 的系数为 0 或 -1. 取 $\beta = (0,\cdots,0,1)'$，令 $\alpha = C\beta$，显然 $\alpha \neq 0$，并且有 $\alpha' A\alpha = 0$ 或 -1，矛盾. 因此 $p = n$.

充分性. 设 $X'AX$ 的正惯性指数等于 n，则可以作非退化线性替换 $X = CY$，化成规范形. 即

$$X'AX \xlongequal{X = CY} y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

任取 $\alpha \in \mathbf{R}^n$ 且 $\alpha \neq 0$. 令 $\beta = C^{-1}\alpha = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$，则 $\beta \neq 0$，从而得出

$$\alpha' A\alpha \xlongequal{\alpha = C\beta} b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 > 0.$$

因此 $X'AX$ 是正定的. ∎

从定理 1 立即得出

推论 2 n 元实二次型 $X'AX$ 是正定的

$\Longleftrightarrow$ 它的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$

$\Longleftrightarrow$ 它的标准形中 n 个系数全大于 0. ∎

定义 2 实对称矩阵 A 称为**正定的**，如果实二次型 $X'AX$ 是正定的. 即，对于 R^n 中任意非零列向量 α，有 $\alpha' A\alpha > 0$.

正定的实对称矩阵简称为**正定矩阵**.

从定义 2，定理 1，推论 2 立即得出

定理 3 n 级实对称矩阵 A 是正定的

$\Longleftrightarrow$ A 的正惯性指数等于 n

$\Longleftrightarrow$ $A \simeq I$

$\Longleftrightarrow$ A 的合同标准形中主对角元全大于 0. ∎

对于 n 级实对称矩阵 A，能找到正交矩阵 T，使得 $T'AT = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 因此从定理 3 立即得到

推论 4　n 级实对称矩阵 A 是正定的当且仅当 A 的特征值全大于零. ▌

由于实对称矩阵 A 正定当且仅当 $A \simeq I$,根据合同的对称性和传递性立即得到

推论 5　与正定矩阵合同的实对称矩阵也是正定矩阵.

从推论 5 立即得出

推论 6　与正定二次型等价的实二次型也是正定的,从而非退化线性替换不改变实二次型的正定性. ▌

推论 7　正定矩阵的行列式大于零.

证明　设 A 是 n 级正定矩阵,则 $A \simeq I$. 从而存在实可逆矩阵 C,使得 $A = C'IC = C'C$. 因此

$$|A| = |C'C| = |C'||C| = |C|^2 > 0. \quad ▌$$

反之,如果实对称矩阵 A 的行列式大于零,A 不一定是正定的. 例如,设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

显然,$|A| = 1 > 0$,但是 A 的正惯性指数为 0,因此 A 不是正定的.

为了从子式的角度研究实对称矩阵 A 是正定的条件,我们引出下述概念:

定义 3　设 A 是一个 n 级矩阵,A 的下述主子式

$$A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,k \\ 1,2,\cdots,k \end{pmatrix},$$

称为 A 的 k 阶**顺序主子式**,$k = 1,2,\cdots,n$.

例如,设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

则 A 的顺序主子式有 3 个,分别是

$$|1|, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

定理 8　实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件为 A 的所有顺序主子式全大于零.

证明　必要性. 设 n 级实对称矩阵 A 是正定的. 对于 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$,把 A 写成分块矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}A_k & B_1\\ B_1' & B_2\end{pmatrix},$$

其中 $|A_k|$ 是 A 的 k 级顺序主子式. 我们来证 A_k 是正定的. 在 $\mathbf{R}^k$ 中任取一个非零列向量 δ, 由于 A 是正定的, 因此

$$0<\begin{pmatrix}\delta\\0\end{pmatrix}'A\begin{pmatrix}\delta\\0\end{pmatrix}=(\delta' \quad 0)\begin{pmatrix}A_k & B_1\\ B_1' & B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta\\0\end{pmatrix}=\delta'A_k\delta.$$

从而 A_k 是正定矩阵. 因此 $|A_k|>0$.

充分性. 对于实对称矩阵的级数 n 作数学归纳法.

$n=1$ 时, 1 级矩阵 (a), 已知 $a>0$, 从而 (a) 正定.

假设对于 $n-1$ 级实对称矩阵命题为真. 现在来看 n 级实对称矩阵 $A=(a_{ij})$. 把 A 写成分块矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha' & a_{nn}\end{pmatrix},\tag{1}$$

其中 A_{n-1} 是 $n-1$ 级实对称矩阵. 显然 A_{n-1} 的所有顺序主子式是 A 的 1 阶至 $n-1$ 阶顺序主子式, 由已知条件得, 它们都大于零. 于是据归纳假设得, A_{n-1} 是正定的. 因此有 $n-1$ 级实可逆矩阵 C_1, 使得

$$C_1'A_{n-1}C_1=I_{n-1}.\tag{2}$$

由于

$$\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha' & a_{nn}\end{pmatrix}\xrightarrow{②+(-\alpha'A_{n-1}^{-1})\cdot①}\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ 0 & a_{nn}-\alpha'A_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[②+①\cdot(-A_{n-1}^{-1}\alpha)]{}\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & a_{nn}-\alpha'A_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix},$$

记 $b=a_{nn}-\alpha'A_{n-1}^{-1}\alpha$, 因此

$$\begin{pmatrix}I_{n-1} & 0\\ -\alpha'A_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha' & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}.\tag{3}$$

由于

$$\begin{pmatrix}I_{n-1} & 0\\ -\alpha'A_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}',$$

因此从(3)式得

$$A\simeq\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix},\tag{4}$$

且 $|A|=|A_{n-1}|b$, 从而 $b>0$. 由于

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1' A_{n-1} C_1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}. \tag{5}$$

由于(5)式右端的矩阵是正定的,于是从(4)、(5)式得,A 是正定的.

根据数学归纳法原理,充分性得证. ▌

从定理 8 立即得到

推论 9 实二次型 $X'AX$ 是正定的充分必要条件为 A 的所有顺序主子式全大于零. ▌

例 1 判别下述实二次型是否正定:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

解 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

由于 A 的 2 级顺序主子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 < 0,$$

因此实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 不是正定的.

例 2 证明:对于任一实可逆矩阵 C,都有 $C'C$ 是正定矩阵.

证明 显然 $C'C$ 是对称矩阵.由于 $C'C = C'IC$,且 C 是实可逆矩阵,因此

$$C'C \simeq I.$$

从而 $C'C$ 是正定矩阵. ▌

实二次型除了有正定的以外,还有其它一些类型.

定义 4 n 元实二次型 $X'AX$ 称为是**半正定(负定,半负定)**的,如果对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一非零列向量 α,都有

$$\alpha'A\alpha \geqslant 0 \quad (\alpha'A\alpha < 0, \alpha'A\alpha \leqslant 0).$$

如果 $X'AX$ 既不是半正定的,又不是半负定的,则称它是**不定的**.

定义 5 实对称矩阵 A 称为**半正定(负定,半负定,不定)**的,如果实二次型 $X'AX$ 是半正定(负定,半负定,不定)的.

例 3 判别下列 3 元实二次型属于哪种类型:

(1) $y_1^2+y_2^2$；　　(2) y_1^2；

(3) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$；　　(4) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$；

(5) $-y_1^2-y_2^2$.

解　(1) 半正定；　(2) 半正定；　(3) 不定；

(4) 负定；　(5) 半负定.

习　题　6.3

1. 证明：如果 A,B 都是 n 级正定矩阵，则 $A+B$ 也是正定矩阵.

2. 证明：如果 A 是正定矩阵，则 A^{-1} 也是正定矩阵.

3. 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，则 A^* 也是正定矩阵.

4. 设 A 是 n 级实对称矩阵，它的 n 个特征值的绝对值中最大者记作 $Sr(A)$. 证明：当 $t>Sr(A)$ 时，$tI+A$ 是正定矩阵.

5. 证明：正定矩阵的迹大于零

6. 判断下列实二次型是否正定：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$.

7. t 满足什么条件时，下列实二次型是正定的?

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$.

8. 证明：n 级实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件为：有可逆实对称矩阵 C 使得 $A=C^2$.

9. 证明：如果 A 是正定矩阵，则存在正定矩阵 C，使得 $A=C^2$.

10. 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，B 是 n 级实对称矩阵，则存在一个 n 级实可逆矩阵 C，使得 $C'AC$ 与 $C'BC$ 都是对角矩阵.

11. 证明：如果 A,B 都是 n 级正定矩阵，且 $AB=BA$，则 AB 也是正定矩阵.

12. 证明：实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件为 A 的所有主子式全大于零.

13. 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，B 是 n 级半正定矩阵，则 $A+B$ 是正定矩阵.

14. 判断 $I+J$ 是否正定矩阵，其中 J 是元素全为 1 的 n 级矩阵.

15. 证明：n 元实二次型 $X'AX$ 是半正定的充分必要条件为它的正惯性指数等于它的秩

16. 证明：n 元实二次型 $X'AX$ 是半正定的充分必要条件为它的标准形中 n 个系数全非负.

17. 证明：n 级实对称矩阵 A 是半正定的充分必要条件为它的特征值全非负.

18. 证明：n 级实对称矩阵 A 是负定的充分必要条件为：它的偶数阶顺序主子式全大于零，奇数阶顺序主子式全小于零.

19. 证明：n 级实对称矩阵 A 是半正定的充分必要条件为 A 的所有主子式全非负.

应用与实验课题：正(负)定矩阵在极值问题中的应用

正定(负定)矩阵在多元函数的极值问题中有重要应用.

设 $F(X)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有3阶连续偏导数，设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，如果 $F(X)$ 在 α 处的一阶偏导数全为零，则称 α 是 $F(X)$ 的一个稳定点，构造一个 n 级矩阵 H 如下：

$$H=\left(F''_{x_ix_j}(\alpha)\right), \tag{1}$$

其中 α 是 $F(X)$ 的一个稳定点，称 H 是函数 $F(X)$ 在 α 处的**何塞(Hesse)矩阵**. 如果 H 是正定的，则 $F(X)$ 在 α 处达到极小值；如果 H 是负定的，则 $F(X)$ 在 α 处达到极大值；如果 H 是不定的，则 $F(X)$ 在 α 处既不是极大，也不是极小，这时称 α 是 $F(X)$ 的鞍点.

我们以二元函数 $F(x,y)$ 为例来证明上述结论.

设 (x_0,y_0) 是 $F(x,y)$ 的一个稳定点. 如果 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域里有3阶连续偏导数，则 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可展成泰勒级数：

$$\begin{aligned}
&F(x_0+h,y_0+k)\\
&=F(x_0,y_0)+[hF'_x(x_0,y_0)+kF'_y(x_0,y_0)]+\\
&\quad+\frac{1}{2}[h^2F''_{xx}(x_0,y_0)+2hkF''_{xy}(x_0,y_0)+k^2F''_{yy}(x_0,y_0)]+R\\
&=F(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(ah^2+2bhk+ck^2)+R,
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $a=F''_{xx}(x_0,y_0),b=F''_{xy}(x_0,y_0),c=F''_{yy}(x_0,y_0)$,

$$R=\frac{1}{6}[h^3F'''_{xxx}(z)+3h^2kF'''_{xxy}(z)+3hk^2F'''_{xyy}(z)+k^3F'''_{yyy}(z)],$$

$$z=(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\ 0<\theta<1.$$

如果 $|h|,|k|$ 足够小，则 $|R|<\frac{1}{2}|ah^2+2bhk+ck^2|$. 从而 $F(x_0+h,y_0+k)-F(x_0,y_0)$ 将与 $ah^2+2bhk+ck^2$ 同号. 表达式

$$f(h,k)=ah^2+2bhk+ck^2 \tag{3}$$

是 h,k 的实二次型. 因此，如果这个二次型是正定的，则对于足够小的 $|h|$，$|k|$，且 $(h,k)\neq(0,0)$，有

$$F(x_0+h, y_0+h) - F(x_0, y_0) > 0.$$

这说明 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处达到极小值.

类似地,如果二次型(3)是负定的,则 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处达到极大值.如果二次型(3)是不定的.则 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处即不是极大,又不是极小.

二次型(3)的矩阵为

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0) & F''_{xy}(x_0, y_0) \\ F''_{xy}(x_0, y_0) & F''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

这是 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的何塞(Hesse)矩阵.利用 H 的顺序主子式可判断二次型(3)是正定,还是负定,还是不定.

1. 求 $F(x, y) = 6xy - x^3 - y^3$ 的极值.

2. 某厂生产两种产品,价格分别为 $P_1 = 4, P_2 = 8$,产量分别为 Q_1, Q_2.成本函数为 $C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2 + 2$.问:该厂应如何安排生产,才能使所得利润最大?

习题答案与提示

第1章　线性方程组

习　题　1.1

1. (1) $(2,-1,1)$;　　(2) $(1,-2,3)$;　　(3) $(2,-1,1,-3)$;
   (4) $(5,-2,1)$;　　(5) $(-8,3,6,0)$.

2. (1) 应当分别给 A_1,A_2,A_3 投资 $\frac{5}{6},\frac{5}{3}$,7.5 千元;
   (2) 相应的线性方程组的解是 $(-5,10,5)$,单位为千元.这不是实际问题的可行解(因为出现 -5).

3. (1) 无解;
   (2) 有无穷多个解,一般解是
$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 - 3, \\ x_2 = x_3 + x_4 - 4, \end{cases}$$
   其中 x_3,x_4 是自由未知量;
   (3) 无解;
   (4) 有无穷多个解,一般解是
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{11}{7}x_3 + \frac{23}{7}, \\ x_2 = -\frac{5}{7}x_3 - \frac{1}{7}, \end{cases}$$
   其中 x_3 是自由未知量.

习　题　1.2

1. 原线性方程组有解当且仅当 $a=-1$,此时它的一般解是
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{18}{7}x_3 + \frac{1}{7}, \\ x_2 = -\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}, \end{cases}$$
   其中 x_3 是自由未知量.

2. 原线性方程组有唯一解当且仅当 $a \neq -\frac{2}{3}$;
   原线性方程组无解当且仅当 $a = -\frac{2}{3}$.

3. (1) 原线性方程组有唯一解:$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$;

(2) 把第 3 个方程改成 $x-4y=3$，则新方程组无解.

这个小题答案不唯一.

(3) 请读者自己画出三条直线，并且看它们是否相交于坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$的点.

4. 原线性方程组有解当且仅当 $a=-2$. 此时，它的一般解为

$$\begin{cases} x_1=-3x_3-2, \\ x_2=2x_3+5, \\ x_4=-10, \end{cases}$$

其中 x_3 是自由未知量.

5. 原线性方程组有解当且仅当 $c=0$ 且 $d=2$. 此时，它的一般解为

$$\begin{cases} x_1=x_3+x_4+5x_5-2, \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3, \end{cases}$$

其中 x_3,x_4,x_5 是自由未知量.

6. 不存在满足要求的二次多项式.

7. (1) 有非零解. 它的一般解是

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{3}x_4, \\ x_2=-\frac{2}{3}x_4, \\ x_3=-\frac{1}{3}x_4, \end{cases}$$

其中 x_4 是自由未知量；

(2) 有非零解，它的一般解是

$$\begin{cases} x_1=\frac{55}{41}x_4, \\ x_2=\frac{10}{41}x_4, \\ x_3=-\frac{33}{41}x_4, \end{cases}$$

其中 x_4 是自由未知量.

*8. 最大值 1.85 千元，此时投给 A_1,A_2,A_3 的钱分别为 0,5,5(千元)；最小值 1.7 千元，此时投给 A_1,A_2,A_3 的钱分别为 5,0,5(千元).

习　题　1.3

1. 显然 $0=0+0i\in\mathbf{Q}(i)$，$1=1+0i\in\mathbf{Q}(i)$，容易验证 $\mathbf{Q}(i)$ 对于加、减、乘、除 4 种运算封闭，从而 $\mathbf{Q}(i)$ 是一个数域.

2. 最大的数域是复数域 $\mathbf{C}$.

应用与实验课题：配制食品模型

1. 可以. 解不唯一，有无穷多个解，所有解是

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{5}x_5 + 560, \\ x_2 = \dfrac{8}{15}x_5 + \dfrac{1280}{3}, \\ x_3 = \dfrac{2}{3}x_5 + \dfrac{2800}{3}, \\ x_4 = -\dfrac{7}{5}x_5 + 80, \end{cases}$$

其中 $0 \leqslant x_5 \leqslant \frac{400}{7}$.

2. 所花费的成本的表达式为

$$\begin{aligned} f &= 4.4x_1 + 2x_2 + 2.4x_3 + 2.8x_4 + 3.2x_5 \\ &= -\frac{118}{75}x_5 + \frac{17344}{3}. \end{aligned}$$

当 $x_5 = \frac{400}{7}$ 时，成本最低，此时的成本为 5691.43 元.

3. 可以.解唯一：$\left(560, \frac{1280}{3}, \frac{2800}{3}, 80\right)$.

此时所花费的成本为 5781.33 元

4. 列出的线性方程组有唯一解：(80，－960，－440，3320). 这不是可行解.因此不可以.

5. 列出的线性方程组无解.因此不可以.

第2章　行列式

习　题　2.1

1. (1) 6，偶；　(2) 11，奇　(3) 15，奇；
(4) 21，奇；　(5) 28，偶；　(6) 36，偶；
(7) 0，偶；　(8) 15，奇；　(9) 18，偶.

2. (1) $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$；　(2) $n-1$.

3. 依次是(6,2)，(5,2)，(3,2)，(2,1)(答案不唯一，但必定是偶数次).

4. 逆序数是 $\frac{n(n-1)}{2}$. 当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时，是偶排列；当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时，是奇排列.

5. $\frac{n(n-1)}{2} - r$.　　6. (1) $k-1$；　(2) $n-k$.

7. (1) 11；　(2) 0；　(3) 0.

8. 系数行列式的值为 23，因此有唯一解：(2，－1).

习　题　2.2

1. (1) $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$；　(2) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$；

(3) $(-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n$; (4) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$;

(5) 5!.

2. (1) -49; (2) 103;

(3) $a_{11}a_{22}a_{33}$; (4) $c(a_1b_2-a_2b_1)$.

3. 0.

4. 不一定带负号.这一项所带符号为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,这一项带正号;

当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,这一项带负号.

5. $5x^4$, $-4x^3$.

*6. 提示:用行列式的定义,设 $|A|$ 的完全展开式中,等于1的项有 k 项,则等于 -1 的项有$(n!-k)$项.

习 题 2.3

1. (1) 8; (2) $4\frac{2}{3}$; (3) 155; (4) 160.

2. (1) $[a+(n-1)](a-1)^{n-1}$; (2) $(-1)^{n-1}b^{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-b\right)$.

3. 提示:利用行列式的性质3(对于列来用).

4. (1) $a_1-a_2b_2-a_3b_3-\cdots-a_nb_n$;

(2) $n\geqslant 3$ 时为0, $n=2$ 时为$(a_1-a_2)(b_2-b_1)$, $n=1$ 时为 a_1+b_1;

*(3) $(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}\right)-1\right)$.

习 题 2.4

1. (1) -726; (2) -100;

(3) $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$; (4) $(\lambda-1)(\lambda-3)^2$.

2. $(-1)^{n-1}(n-1)!(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)$.

3. $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$.

5. $D_n=n+1$(提示:当 $n>1$ 时,先将第2列至第 n 列都加到第1列上,然后按第1列展开.)

6. $(n+1)a^n$.

7. 方程的全部根是 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$.

8. $-2(n-2)!$(提示:把第1行的(-1)倍分别加到第2,3,…,n行上,然后按第2列展开.)

*9.

$$D_n=\frac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}.$$

(提示:把第 n 列的 n 个元素依次表示成 $0+y,\cdots,0+y,(x-y)+y$,然后用性质3,可求出 D_n 的一个递推关系式.再考虑转置矩阵的行列式,可得出 D_n 的又一

个递推关系式.)

10.

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

(提示:依次把第 $n-1$ 行的 (-1) 倍加到第 n 行上,把第 $n-2$ 行的 (-1) 倍加到第 $n-1$ 行上,…,把第 1 行的 (-1) 倍加到第 2 行上.然后把第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列上.)

11. 提示:用性质 3,把行列式 $|A(t)|$ 表示成 2^n 个行列式的和,其中有一个行列式是 $|A|$,其余非零行列式中,有一列元素全为 t,其余列是 A 的相应列,按照元素全为 t 的这一列展开.

12. (1) $n\geqslant 3$ 时为 0,$n=2$ 时为 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)$;

$n=1$ 时为 $1+x_1y_1$;

(2) $n!\left(1+t+\frac{t}{2}+\cdots+\frac{t}{n}\right)$.

习　题　2.5

1. 有唯一解.　　2. 有唯一解.

3. 有非零解 $\Longleftrightarrow \lambda=1$ 或 $\lambda=3$.

4. 有非零解 $\Longleftrightarrow a=1$ 或 $b=0$.

5. 有唯一解 $\Longleftrightarrow a\neq 1$ 且 $b\neq 0$.

6. 当 $a=1$ 且 $b=\frac{1}{2}$ 时,有无穷多个解;

当 $a=1$ 且 $b\neq\frac{1}{2}$ 时,无解;当 $b=0$ 时,无解.

7. 有唯一解 $\Longleftrightarrow a\neq 1$ 且 $b\neq 0$;

当 $b=0$ 时,有无穷多个解;当 $b\neq 0$ 且 $a=1$ 时,无解.

习　题　2.6

1. 154.

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$.

3. $(-1)^{kr}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$.

4. (1) $\prod\limits_{k=1}^{n-2}k!$;　　(2) $(n-1)\prod\limits_{k=1}^{n-2}k!$.

应用与实验课题:行列式在几何中的应用

1. (1) $\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$;　　(2) $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$.

2. $\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$.

第 3 章　线性方程组的进一步理论

习　题　3.1

1. (1) $(0,0,0,0)'$;　　(2) $(0,0,0,0)'$;

2. $\gamma = (-21,7,15,13)$.

3. (1) $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3$，表出方式唯一；

   (2) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

   (3) $\beta = -\alpha_1 - 5\alpha_2$，表出方式有无穷多种.

4. 提示：线性方程组 $x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = \alpha$ 有唯一解，因此 α 能够由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出，且表出方式唯一. 这种表出方式是：$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$.

5. 提示：与第 4 题证法类似

$$\alpha = (a_1 - a_2)\alpha_1 + (a_2 - a_3)\alpha_2 + (a_3 - a_4)\alpha_3 + a_4\alpha_4.$$

6. 提示：$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1 \cdot \alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_s$.

7. 提示：用第 6 题的结论.　　8. 提示：去证 W 对加法，数量乘法封闭.

习　题　3.2

1. (1) 不对. 对于任何一个向量组，系数全为 0 的线性组合都等于零向量.

   (2) 不对. 仅一组不全为零的数不够，应该是对任意一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 都有 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 才是线性无关的.

   (3) 不对. 例如，几何空间中，设 α_1,α_2 共线，α_3 与 α_1 不共线，这时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 共面，即它们线性相关. 但是 α_3 不能由 α_1,α_2 线性表出.

2. (1) 线性无关；(2) 线性相关，$\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$；

   (3) 线性相关，$\alpha_3 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2$；(4) 线性无关.

3. 提示：设 4 个向量的坐标分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. 去说明齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0$ 有非零解.

4. 提示：任取 $n+1$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$. 去说明齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n+1}\alpha_{n+1} = 0$ 有非零解.

5. 提示：仿照本节例 2 的证法.

6. 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2,\alpha_2 + \alpha_3,\alpha_3 + \alpha_4,\alpha_4 + \alpha_1$ 线性相关（提示：仿照本节例 2 的方法，但是相应的齐次线性方程组的系数行列式等于 0，从而它有非零解）.

7. 提示：充分性. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 设

$$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s, \qquad \beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_s\alpha_s,$$

   去证 $k_1 = l_1,\cdots,k_s = l_s$. 从而表出方式唯一.

   必要性. 设 β 可唯一表示成 $\beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_s\alpha_s$. 设

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

把上面两个式子相加，利用 β 的表示法唯一去证

$$k_1=0,\cdots,k_s=0.\text{从而 } \alpha_1,\cdots,\alpha_s \text{ 线性无关.}$$

8. 提示：用线性无关的定义去证.
9. 提示：必要性显然. 充分性用反证法.

*10. 提示：去证 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性相关当且仅当有不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_r$ 使得

$$\begin{cases} a_{11}k_1+\cdots+a_{r1}k_r=0,\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{1r}k_1+\cdots+a_{rr}k_r=0. \end{cases}$$

11. 提示：$r=n$ 时，以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为列向量组的矩阵的行列式是 n 阶范德蒙行列式. 当 $r<n$ 时，令

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\ a_1\\ \vdots\\ a_1^{r-1}\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\ a_2\\ \vdots\\ a_2^{r-1}\end{pmatrix},\cdots,\beta_r=\begin{pmatrix}1\\ a_r\\ \vdots\\ a_r^{r-1}\end{pmatrix}$$

同上面的道理，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关. 从而它的延伸组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 也线性无关.

习　题　3.3

1. 提示：由于齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=0$ 的系数矩阵是阶梯形矩阵. 其非零行数目 2 等于未知量数目，因此方程组只有零解. 从而 α_1,α_2 线性无关. 类似的方法，可知 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$ 有非零解，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. 因此 α_1,α_2 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组. 从而 $\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=2$.
2. α_1,α_3（或 α_2,α_3）是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组，$\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=2$.（提示：先证 α_1,α_3 线性无关；然后容易看出 α_1,α_2 线性相关，从而 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2$ 线性相关.）
3. 提示：去证：从其余向量中任取一个添进去，所得到的 $r+1$ 个向量形成的向量组一定线性相关.
4. 证明：设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关. 据习题 3.1 的第 4 题结论得，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 可以由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出. 据本节推论 3 得，$r\leqslant n$. ∎
5. 提示：用第 4 题结论得，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_3,\beta$ 一定线性相关.
6. 提示：由已知条件得，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，于是有
$$n=\mathrm{rank}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}\leqslant\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\leqslant n.$$
7. 提示：先证这 r 个向量组成的向量组的秩是 r，从而这 r 个向量线性无关.
8. 提示：充分性由克莱姆法则立即得出. 关于必要性，利用第 6 题的结论得出，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.
9. 提示：取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$. 则 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r},\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性表出. 去证 $\mathrm{rank}\{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r},\beta\}<r+1$，从而 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r},\beta$ 线性相关.

10. 提示：设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m};\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 分别是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的一个极大线性无关组. 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性表出.

习　题　3.4

1. K^4 的一个基是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$；$\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4)'$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标是 $(a_1,a_2,a_3,a_4)'$；K^4 的另一个基是 $\eta_1=(1,0,0,0)'$，$\eta_2=(1,1,0,0)'$，$\eta_3=(1,1,1,0)'$，$\eta_4=(1,1,1,1)'$，α 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标是 $(a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_4,a_4)'$.
2. 提示：以 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为列向量组的矩阵的行列式不等于 0，从而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 线性无关. 然后用命题 5.
3. (1) 是；　(2) 是；　(3) 不是.
4. 提示：取 U 的一个基 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$. 去证向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩为 r，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.
5. 提示：类似于定理 1 的证明方法.

习　题　3.5

1. (1) 秩是 3；第 1、2、3 列构成列向量组的一个极大线性无关组；
   (2) 秩是 2；第 1、2 列构成列向量组的一个极大线性无关组.
2. (1) 秩是 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大线性无关组；
   (2) 秩是 2；α_1,α_3 是一个极大线性无关组；
   (3) 秩是 2；α_1,α_2 是一个极大线性无关组.
3. A 的第 1,2,3 列是列空间的一个基；行空间的维数是 3.
4. 当 $\lambda\neq 3$ 时，矩阵的秩为 3；当 $\lambda=3$ 时，矩阵的秩为 2.（提示：易看出，该矩阵有一个 2 阶子式不等于零. 去计算第 1、3、4 列形成的 3 阶子式，由此看出，$\lambda\neq 3$ 时，此 3 阶子式不等于零，从而矩阵的秩为 3. $\lambda=3$ 时，把矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵.）
5. 提示：A 的子矩阵的子式也是 A 的子式.
6. 秩是 4；A 的前 4 列构成列向量组的一个极大线性无关组.（提示：仿照本节例 2 的方法.）
7. 秩是 3；A 的前 3 构成列向量组的一个极大线性无关组.
8. 提示：设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_t}$ 是 A_1 的行向量组的一个极大线性无关组，把它扩充成 A 的行向量组的一个极大线性无关组. 由于 A 的行秩为 r，因此这需要添加 $r-t$ 个行向量.

*9. 提示：由已知条件得，这个矩阵至多有 $n^2-(n^2-n+1)=n-1$ 个元素不是 0，从而它必有零行.

*10. 最多是 $n-1$，例如下述 n 级矩阵的秩是 $n-1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*11. (1) 提示：用反证法．假设 $|A| = 0$．则 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关．于是有不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$．令

$$|k_l| = \max\{|k_1|,|k_2|,\cdots,|k_n|\}.$$

考虑上述向量等式的第 l 个分量，去推出矛盾．

(2) 提示：令

$$D(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & \cdots & a_{2n}t \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

习　题　3.6

1. 有唯一解．(提示：仿照本节例 1 的方法判断方程组有解)．
2. 有解，且有无穷多个解．
3. 无解．(提示：求出增广矩阵 $\tilde{A}$ 的秩为 4)．
4. 提示：设线性方程组的增广矩阵为 $\tilde{A}$，容易看出 $\tilde{A}$ 是 B 的子矩阵．

习　题　3.7

1. 每一题中，基础解系的取法都不唯一，但它们等价．

(1) $\eta_1=(-5,3,14,0)'$，　$\eta_2=(1,-1,0,2)'$，

$W=\{k_1\eta_1+k_1\eta_2 \mid k_1,k_2\in K\}$；

(2) $\eta_1=(-7,-2,5,9)'$，　$W=\{k_1\eta_1 \mid k_1\in K\}$；

(3) $\eta_1=(1,1,0,-1)'$，　$W=\{k_1\eta_1 \mid k_1\in K\}$；

(4) $$\eta_1-\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$W=\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3+k_4\eta_4 \mid k_1,k_2,k_3,k_4\in K\}$．

2. 提示：设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 线性无关，且与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 等价，则 $m=t$，且 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m\in W$(解空间)．由于 $\dim W=t$，因此 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 是 W 的一个基．
3. 提示：由于解空间 W 的维数等于 $n-r$，因此任意 $n-r$ 个线性无关的解向量都是 W 的一个基．
4. 提示：取一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$．
5. 提示：利用行列式按一行展开的定理．
6. (1) 提示：设 $B=(b_{ij})$，在原齐次解性方程组的上面添加一个方程“$0=0$”．

(2) 提示：去求解空间的维数．

7. 提示：以 A_1 为系数矩阵的齐次线性方程组和以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组同解．

习　题　3.8

1. 每题的答案均不唯一.

(1) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\middle| k_1,k_2\in K\right\}$;

(2) $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\\3\end{pmatrix}\middle| K\in K\right\}$;

(3)

$$\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\middle| k_i\in K\quad i=1,2,3,4\right\}.$$

2. 提示:用克莱姆法则.

3. 提示:

$$u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\cdots+u_t\gamma_t=(1-u_2-\cdots-u_t)\gamma_1+u_2\gamma_2+\cdots+u_t\gamma_t.$$

4. 提示:$\gamma=\gamma_0+k_1(\gamma_1-\gamma_0)+k_2(\gamma_2-\gamma_0)+\cdots+k_t(\gamma_t-\gamma_0)$

应用与实验课题:线性方程组在几何中的应用

1. 充分必要条件是下面两个矩阵的秩都等于 2:

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{pmatrix}.$$

2. 是(提示:计算相应的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩).

3. 提示:设通过五点 $M_i(x_i,y_i),i=1,2,3,4,5$ 的二次曲线 C 的方程为 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$.则

点 $M(x,y)$ 在二次曲线 C 上

$\Longleftrightarrow$ 以 a、b、c、d、e、f 为未知量的齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,\\ax_1^2+bx_1y_1+cy_1^2+dx_1+ey_1+f=0,\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ax_5^2+bx_5y_5+cy_5^2+dx_5+ey_5+f=0.\end{cases}\tag{2}$$

有非零解,并且非零解的前 3 个分量不全为 0

$\Longleftrightarrow$ 方程组(2) 的系数矩阵 A 的行列式等于零,即

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_5^2 & x_1y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

并且 A 的$(1,j)$元的代数余子式 $A_{1j}(j=1,2,3)$ 中至少有一个不为零.

因此,(3) 式就是所求的二次曲线方程.

4. $2x^2+7y^2+y-8=0$.

第 4 章　矩阵的运算

习　题　4.1

1. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.　　2. $\begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r \end{bmatrix}$.

3. $M=(k-\lambda)I+\lambda J$.

4. (1) $\begin{bmatrix} 12 & 26 \\ -27 & 2 \\ 23 & 4 \end{bmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(4) 20;　(5) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$;　(6) $\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 \end{bmatrix}$;

(7) $(a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2, a_3+b_3+c_3)$;

(8) $\begin{bmatrix} d_1a_1 & d_1a_2 & d_1a_3 \\ d_2b_1 & d_2b_2 & d_2b_3 \\ d_3c_1 & d_3c_2 & d_3c_3 \end{bmatrix}$;　(9) $\begin{bmatrix} a_1d_1 & a_2d_2 & a_3d_3 \\ b_1d_1 & b_2d_2 & b_3d_3 \\ c_1d_1 & c_2d_2 & c_3d_3 \end{bmatrix}$;

(10) $\begin{bmatrix} 7 & 28 & 67 \\ 0 & 40 & 104 \\ 0 & 0 & 72 \end{bmatrix}$;

(11) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ ka_1+b_1 & ka_2+b_2 & ka_3+b_3 & ka_4+b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$;

(12) $\begin{bmatrix} a_1+a_2k & a_2 & a_3 \\ b_1+b_2k & b_2 & b_3 \\ c_1+c_2k & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$;　(13) $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$;

(14) $\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{bmatrix}$;　(15) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

5. $AB=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}23&34\\31&46\end{pmatrix}$,

$AB-BA=\begin{pmatrix}-4&-12\\12&4\end{pmatrix}$.

6. $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$.

7. (1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$;

(5) 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,则 $A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$;$A^n=0$,当 $n\geqslant 3$;

(6) 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

则 $A^n=(\lambda I+B)^n=\lambda^n I+n\lambda^{n-1}IB+\dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}IB^2$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix};$$

(7) $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$; (8) $4I$.

8. I.

10. 提示:由已知条件得,$A^2=A\Longleftrightarrow \frac{1}{4}(B+I)^2=\frac{1}{2}(B+I)$.

11. 提示:由已知条件得,$AX=0$ 的解空间是 K^n.用维数公式去求 $\mathrm{rank}(A)$.

习 题 4.2

1. 提示:利用对角矩阵左(右)乘一个矩阵的规律.

2. 提示:方阵 A 为上三角矩阵当且仅当

$$A(i;j)=0,当\ i>j.$$

3. 提示:设矩阵 $A=(a_{ij})$ 与所有 n 级矩阵可交换.显然,A 必为 n 级矩阵.利用基本矩阵左(右)乘一个矩阵的规律,从 $E_{1j}A=AE_{1j}$, $j=1,2,\cdots,n$,可推出 A 必为数量矩阵.

4. 提示:用对称矩阵的定义去证.

8. 提示:$A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$.

关于唯一性.假如 $A=A_1+A_2$,其中 A_1,A_2 分别是对称,斜对称矩阵,则 $A'=(A_1+A_2)'=A_1-A_2$.从而可以解出 A_1,A_2.

9. 提示:$A^2(i;i)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}^2, i=1,2,\cdots,n$.

10. 提示:从 $A'=-A$ 得,$|A'|=|-A|$.

*11. 提示:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{j}+\textcircled{i}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & -1 & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{i}+\textcircled{j}\cdot 1} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & -1 & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{j}+\textcircled{i}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & -1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{j}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

习　题　4.3

1. 提示:分别取 A,B 的列向量组的一个极大线性无关组.

*2. **证明**　设 A 的行向量组的一个极大线性无关组是 $\gamma_{t_1},\gamma_{t_2},\cdots,\gamma_{t_r}$.从而

$$A=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{11}\gamma_{t_1} & +k_{12}\gamma_{t_2} & +\cdots+ & k_{1r}\gamma_{t_r}\\ k_{21}\gamma_{t_1} & +k_{22}\gamma_{t_2} & +\cdots+ & k_{2r}\gamma_{t_r}\\ \vdots & & & \vdots\\ k_{s1}\gamma_{t_1} & +k_{s2}\gamma_{t_2} & +\cdots+ & k_{sr}\gamma_{t_r}\end{pmatrix}$$

5. 提示:$|I+A|=|AA'+A|=|A(A'+I)|$

6. 提示:$|I-A|=|AA'-A|=|A(A'-I)|$

7. 提示:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2\\ x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3 & x_1^4+x_2^4+x_3^4\end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}.
$$

*8. 提示：设 $i = \sqrt{-1}$. 令

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix}
$$

设 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. 去计算 AB.

9. 提示：

$$
\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \right|.
$$

10. 提示：

$$
AB\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ j_1, j_2, \cdots, j_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} AB(i_1; j_1) & AB(i_1; j_2) & \cdots & AB(i_1; j_r) \\ \vdots & & & \vdots \\ AB(i_r; j_1) & AB(i_r; j_2) & \cdots & AB(i_r; j_r) \end{vmatrix}
$$

$$
= \left| \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1 j_1} & b_{1 j_2} & \cdots & b_{1 j_r} \\ b_{2 j_1} & b_{2 j_2} & \cdots & b_{2 j_r} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n j_1} & b_{n j_2} & \cdots & b_{n j_r} \end{pmatrix} \right|
$$

习　题　4.4

1. $k = 0$ 时，kI 不可逆；$k \neq 0$ 时，kI 可逆，此时 $(kI)^{-1} = k^{-1}I$.
2. (1) 不可逆；　　　(2) 不可逆.
3. (1) 可逆，逆矩阵是 $\begin{pmatrix} -11 & 7 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$；

   (2) 可逆，逆矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. 提示：利用 $AA^* = |A|I$，以及命题 7.
5. 提示：计算 $(I - A)(I + A + A^2)$，然后用命题 7.
6. 提示：由 A 满足的式子可得出 $A(A^2 - 2A + 3I) = I$. 然后用命题 7.
7. 提示：由已知条件得 $A(-A^3 + \frac{5}{2}A - 2I) = I$. 然后用命题 7.
8. 提示：根据对称（斜对称）矩阵的定义，并且用性质 4.

9. (1) $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{13}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{17}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; (4) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. (1) $X = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{13}{7} \\ \frac{18}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{20}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{57}{7} & \frac{20}{7} \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{37}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{34}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{38}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$.

11. 提示:把可逆上三角矩阵用初等行变换化成简化行阶梯形矩阵.

12. 提示:$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=I-A^k$.

习 题 4.5

1. 提示:若 $A=0$,则结论显然成立.下设 $A\neq 0$.设 $\mathrm{rank}(A)=r$.先考虑 $r<n$ 的情形.由于 $AB=0$,因此 B 的列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 中每个向量都是 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可以由 $AX=0$ 的一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表出.

2. 提示:由于 $A\neq 0$,因此存在一个 $n\times m$ 非零矩阵 B 使得 $AB=0$ 的充分必要条件是:齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解.

3. (1) 提示:由于 $BC=0$,因此 $C'B'=0$.由于 $\mathrm{rank}(C')=n$,因此 n 元齐次线性方程组 $C'X=0$ 只有零解.

   (2) 提示:利用第(1)小题结论.

4. 提示:由于 $(I+A)(I-A)=I^2-A^2=0$,于是可利用第 1 题的结论.又由于 $(I+A)+(I-A)=2I$,于是可利用习题 4.3 的第 1 题结论.

5. 提示:与第 4 题证法类似.

6. 提示:$\mathrm{rank}[(A'A,A'\beta)]=\mathrm{rank}[A'(A,\beta)]\leqslant\mathrm{rank}(A')$.然后利用本章 §3 的命题 2.

7. 提示:A 的行向量组的极大线性无关组含 1 个向量,利用分块矩阵的乘法.

8. 提示:利用 $AA^* = |A|I$ 若 $|A| \neq 0$,则容易证明结论.若 $|A| = 0$,则 $AA^* = 0$.此时利用第1题的结论.

9. 提示:若 $\mathrm{rank}(A) = n$,则 A 可逆,从而 A^* 也可逆.若 $\mathrm{rank}(A) = n-1$,则 A 有一个 $n-1$ 阶子式不等于0,从而 $A^* \neq 0$.此时由于 $|A| = 0$,因此 $AA^* = |A|I = 0$.利用第1题的结论.若 $\mathrm{rank}(A) < n-1$,则易知 $A^* = 0$.

10. (1) 提示:当 A 可逆时,易得结论,当 A 不可逆时,用第9题结论得,$\mathrm{rank}(A^*) \leqslant 1 < n-1$.

(2) 提示:用伴随矩阵的定义直接计算.

11. 提示:
$$AX = B \Longleftrightarrow A(X_1, X_2, \cdots, X_m) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$$
$$\Longleftrightarrow AX_j = \beta_j, j = 1, 2, \cdots, m.$$

12. 提示:利用 A 可逆当且仅当 $|A| \neq 0$.

13. 提示:利用 A 可逆当且仅当 $|A| \neq 0$.用分块矩阵的初等行变换把右上角变成零矩阵.

14. 提示:利用 B 可逆当且仅当 $|B| \neq 0$,计算 $|B|$ 时可利用习题2.6第3题的结论

15. 提示:$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{②+(-CA^{-1})\cdot①} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \quad CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

于是 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

16. 提示:$\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix} \xrightarrow{①+(-B)\cdot②} \begin{pmatrix} I_n \quad BA & 0 \\ A & I_s \end{pmatrix}$.

17. 提示:利用本节例3的结论和第16题的结论.

18. 提示:用分块矩阵的乘法.

习　题　4.6

1. (1) ~ (7) 都是正交矩阵.(8) 不是正交矩阵.

2. (1) 1;　(2) 1;　(3) 1;　(4) -1;
(5) 1;　(6) -1;　(7) -1;　(8) 2.

4. 提示:利用本节公式(4),以及对称矩阵、对合矩阵的定义(对合矩阵的定义见习题4.5第4题).

5. 提示:设 $A = (a_{ij})$ 的列向量组是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.由于 $(\alpha_1, \alpha_1) = 1$,因此 $a_{11} = \pm 1$.由于 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0, (\alpha_2, \alpha_2) = 1$,则可求出 α_2.由于 $(\alpha_1, \alpha_3) = 0, (\alpha_2, \alpha_3) = 0, (\alpha_3, \alpha_3) = 1$,则可求出 α_3.依次下去,可求出 $\alpha_4, \cdots, \alpha_n$.

6. (1) -9;　(2) 0.

7. (1) $\left(\frac{3}{26}\sqrt{26}, 0, -\frac{1}{26}\sqrt{26}, \frac{2}{13}\sqrt{26}\right)$;

(2) $\left(\frac{1}{6}\sqrt{30}, \frac{1}{30}\sqrt{30}, -\frac{1}{15}\sqrt{30}, 0\right)$

8. 提示:根据两个向量正交的定义去证.

9. 提示:根据两个向量正交的定义去证.

10. 提示:用内积的正定性.

11.

$$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\sqrt{5}\\ -\frac{2}{5}\sqrt{5}\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{4}{15}\sqrt{5}\\ \frac{2}{15}\sqrt{5}\\ -\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

12.

$$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ 0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

13. 提示：去计算 $|A\alpha|^2=(A\alpha,A\alpha)=(A\alpha)'(A\alpha)$.

14. 提示：可分解性的证明，把 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 进行施密特正交化和单位化. 唯一性证明，假如有两个分解式：$A=TB,A=T_1B_1$，利用第5题结论去证 $T=T_1,B=B_1$.

习　题　4.7

1. (1) 是映射，单射，满射；
   (2) 是映射，不是单射，不是满射；
   (3) 是映射，单射，不是满射；
   (4) 不是 $\mathbf{R}$ 到自身的映射.
2. 提示：设 $a_1,a_2\in S$，如果 $(gf)a_1=(gf)a_2$，去说明 $a_1=a_2$，从而 gf 是单射. 设 $c\in S''$，去找 $a\in S$，使得 $(gf)a=c$.
3. 提示：去证 $(f^{-1}g^{-1})(gf)=1_S,(gf)(f^{-1}g^{-1})=1_{S''}$.
4. 提示：去证 $|f(S)|=|S|$，从而 $f(S)=S$.
5. 提示：设 $f:S\to S$ 是满射. 如果 $a_1,a_2\in S$ 使得 $f(a_1)=f(a_2)$，则 $|f(S)|<|S|$，与 f 是满射矛盾.
6. 提示：设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则
   $$f(S)=\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}.$$
   由于 f 是单射，因此 $f(a_i)\neq f(a_j)$，当 $i\neq j$. 从而 $|f(s)|=n$.
7. (1) $\dim \mathrm{Im}\boldsymbol{A}=2$，$A$ 的第 1,2 列是 $\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ 的一个基.
   (2) $\dim \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}=2$，$\ker\boldsymbol{A}$ 的一个基是
   $$(4,3,-2,0)',(1,2,0,-1)'.$$

应用与实验课题：区组设计的关联矩阵

1. 提示：根据区组设计的定义去证. 注意两行的内积等于这两行的对应元素全为 1 的

数对$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$的数目.

2. 提示:设 M 的行向量组是 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_v$. 任给 $i(1\leqslant i\leqslant v)$,用两种方法计算 $\sum\limits_{j\neq i}(\gamma_i,\gamma_j)$.

3. 提示:利用第 2 题的结论可得第一式.用两种方法计算关联矩阵 M 中元素 1 的数目,可得第二式.

4. $MM'=(r-\lambda)I+\lambda J$,其中 J 是元素全为 1 的矩阵;

   $|MM'|=[r+(v-1)\lambda](r-\lambda)^{v-1}$;

   $\text{rank}(MM')=v$.

5. 提示:利用 $\text{rank}(MM')\leqslant\text{rank}(M)$,以及第 4 题的结论.

第 5 章　矩阵的相抵与相似

习　题　5.1

1. 提示:按照等价关系的定义去证.
2. 商集 $s/\sim$ 的每个元素是每一条水平线.
3. 5 种划分:

   $\{\{a\},\{b\},\{c\}\},\{\{a\},\{b,c\}\},\{\{b\},\{a,c\}\}$

   $\{\{c\},\{a,b\}\},\{\{a,b,c\}\}$.

   5 个商集,同上所述.
4. $\mathbf{Z}/(3)=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$.
5. $\mathbf{Z}/(2)=\{\bar{0},\bar{1}\}$,其中 $\bar{0}$ 是偶数集,$\bar{1}$ 是奇数集.

习　题　5.2

1. (1) $\begin{pmatrix}I_2&0\\0&0\end{pmatrix}$;　　(2) $(I_3,0)$;　　(3) $\begin{pmatrix}I_2\\0\end{pmatrix}$.
2. 相抵(因为它们的秩都为 2).
3. 提示:利用推论 4.
4. 提示:利用推论 4 和矩阵的左、右分配律.
5. 提示:设 $\text{rank}(A)=r,\text{rank}(B)=s$,则存在 s 级、n 级可逆矩阵 P、Q,使得

$$AB=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}QB.$$

令

$$QB=\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\}r\\\}n-r\end{matrix},$$

去计算 $\text{rank}(AB)$.

6. 提示:利用第 5 题的结论.

习　题　5.3

1. 提示:由于 A 行满秩,因此 $A=P(I_r\ \ 0)Q$.从而

$$A^{-}=Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r\\C\end{pmatrix}P^{-1}.$$

2. 提示:由于 A 列满秩,因此 $A=P\begin{pmatrix}I_n\\0\end{pmatrix}Q$.从而

$$A^{-}=Q^{-1}(I_n\quad B)P^{-1}$$

3. 提示:利用第1题的结论.$A^{-}B$ 是 $AX=B$ 的一些解,其中 A^{-} 是 A 的任意一个广义逆.
4. 提示:利用第2题的结论.HA^{-} 是 $XA=H$ 的一些解,其中 A^{-} 是 A 的任意一个广义逆.

习　题　5.4

1. 提示:根据矩阵相似的定义去证.
2. 提示:去计算 $A^{-1}(AB)A$.
9. 提示:用反证法.假设 A 可逆,则从原式得

$$A^{-1}(AB-BA)=A^{-1}A.$$

即　$B-A^{-1}BA=I$.然后考虑它们的迹.

习　题　5.5

1. (1) A 的全部特征值是 1(二重),10.

A 的属于 1 的全部特征向量是

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,k_1,k_2\in K,\text{且不全为}0\right\},$$

A 的属于 10 的全部特征向量是

$$\left\{k_3\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\,\middle|\,k_3\in K,\text{且 }k_3\neq0\right\};$$

注:特征向量的答案不唯一,以下同.

(2) A 的全部特征值是 1,3(二重).

A 的属于 1 的全部特征向量是

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\,\middle|\,k_1\in K\text{ 且 }k_1\neq0\right\},$$

A 的属于 3 的全部特征向量是

$$\left\{k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\,\middle|\,k_2\in K\text{ 且 }k_2\neq0\right\};$$

(3) A 的全部特征值是 2(二重),11.

A 的属于 2 的全部特征向量是

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\middle|\, k_1,k_2\in K\text{ 且不全为 }0\right\},$$

A 的属于 11 的全部特征向量是

$$\left\{k_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\middle|\, k_3\in K\text{ 且 }k_3\neq 0\right\};$$

(4) A 的全部特征值是 -1(三重).

A 的属于 -1 的全部特征向量是

$$\left\{k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\middle|\, k\in K\text{ 且 }k\neq 0\right\};$$

(5) A 的全部特征值是 $0,1,-1$.

A 的属于 0 的全部特征向量是

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\middle|\, k_1\in K\text{ 且 }k_1\neq 0\right\},$$

A 的属于 1 的全部特征向量是

$$\left\{k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\middle|\, k_2\in K\text{ 且 }k_2\neq 0\right\},$$

A 的属于 -1 的全部特征向量是

$$\left\{k_3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\middle|\, k_3\in K\text{ 且 }k_3\neq 0\right\}.$$

2. (1) A 的全部特征值是 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}, 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

A 的属于 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的全部特征向量是

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\middle|\, k_1\in \mathbf{C}\text{ 且 }k_1\neq 0\right\},$$

A 的属于 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的全部特征向量是

$$\left\{k_2\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\middle|\, k_2\in \mathbf{C}\text{ 且 }k_2\neq 0\right\};$$

如果把 A 看成实数域上的矩阵,它没有特征值;

(2) A 的全部特征值是 $1,\mathrm{i},-\mathrm{i}$.

A 的属于 1 的全部特征向量是

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-i\end{pmatrix}\middle| k_1\in\mathbf{C}\text{且}k_1\neq 0\right\},$$

A 的属于 i 的全部特征向量是

$$\left\{k_2\begin{pmatrix}1-2i\\-1+i\\-2\end{pmatrix}\middle| k_2\in\mathbf{C}\text{且}k_2\neq 0\right\},$$

A 的属于 $-i$ 的全部特征向量是

$$\left\{k_3\begin{pmatrix}1+2i\\-1-i\\-2\end{pmatrix}\middle| k_3\in\mathbf{C}\text{且}k_3\neq 0\right\};$$

如果把 A 看成实数域上的矩阵,它只有一个特征值 1.

3. 提示:在 $A\alpha=\lambda_0\alpha$ 两边取复数共轭,注意 $\overline{A\alpha}=\overline{A}\overline{\alpha}$,其中 $\overline{A}$ 表示把 A 的每个元素取复数共轭得到的矩阵.

4. 提示:由于 $|0I-A|=|-A|=(-1)^n|A|$,于是可证 0 是 A 的一个特征值.再任取 A 的一个特征值 λ_0,从 $A\alpha=\lambda_0\alpha$(其中 $\alpha\neq 0$) 去证 $\lambda_0=0$.

5. 提示:先证:如果 λ_0 是 n 级幂等矩阵 A 的特征值,则 λ_0 等于 0 或 1.再证:设 $\mathrm{rank}(A)=r$,若 $r=0$,则 0 是 A 的特征值;若 $r=n$,则 1 是 A 的特征值;若 $0<r<n$,则 0 和 1 都是 A 的特征值,在证 1 是 A 的特征值时,利用习题 4.5 第 1 题的结论,去证 $|I-A|=0$.

6. 提示:复数域上的矩阵一定有特征值(因为它的特征多项式在复数域中必有根).设 λ_0 是周期矩阵 A 的任一特征值,则存在 $\alpha\neq 0$ 使 $A\alpha=\lambda_0\alpha$,去证 $\lambda_0^m=1$.

7. 提示:$|\lambda I-A'|=|(\lambda I-A)'|$.

8. (1) 提示:因为 $|0I-A|=|-A|\neq 0$,所以 0 不是 A 的特征值;

   (2) 提示:如果 λ_0 是 A 的特征值,则存在 $\alpha\neq 0$,使得 $A\alpha=\lambda_0\alpha$.在此式两边左乘 A^{-1}.

9. 提示:0 是 A 的特征值 $\Longleftrightarrow |0I-A|=0$.

10. (1) 提示:如果 A 有特征值 λ_0,则存在 $\alpha\neq 0$,使得 $A\alpha=\lambda_0\alpha$.此式两边取转置得,$\alpha'A'=\lambda_0\alpha'$.把上面两个式子相乘得,$(\alpha'A')(A\alpha)=(\lambda_0\alpha')(\lambda_0\alpha)$.

    (2) 提示:$|1\cdot I-A|=|AA'-AI|=|A(A'-I)|$.

    (3) 提示:$|(-1)I-A|=|-AA'-AI|$.

11. (1) 提示:在 $A\alpha=\lambda_0\alpha$ 两边乘以 k;

    (2) 提示:把 $A\alpha=\lambda_0\alpha(\alpha\neq 0)$ 两边左乘 A,得 $A^2\alpha=\lambda_0A\alpha=\lambda_0^2\alpha$,再左乘 A,得 $A^3\alpha=\lambda_0^3\alpha$.

    (3) 提示:设 $A\alpha=\lambda_0\alpha(\alpha\neq 0)$,去计算 $f(A)\alpha$.

12. (1) P 的全部特征值是 $1,\omega,\omega^2$,其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

    P 的属于 1 的全部特征向量是

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\middle|\, k_1\in\mathbf{C}\text{ 且 }k_1\neq 0\right\},$$

P 的属于 ω 的全部特征向量是

$$\left\{k_2\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix}\middle|\, k_2\in\mathbf{C}\text{ 且 }k_2\neq 0\right\},$$

P 的属于 ω^2 的全部特征向量是

$$\left\{k_3\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix}\middle|\, k_3\in\mathbf{C}\text{ 且 }k_3\neq 0\right\};$$

(2) 提示：$P^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，于是 $A=a_1I+a_2P+a_3P^2$.

利用第 11 题(3) 小题的结论和证明过程，以及本题(1) 小题的结论可得：

A 的全部特征值是 $a_1+a_2+a_3, a_1+a_2\omega+a_3\omega^2, a_1+a_2\omega^2+a_3\omega$.

A 的属于 $a_1+a_2+a_3$ 的全部特征向量与 P 的属于 1 的全部特征向量一致，

A 的属于 $a_1+a_2\omega+a_3\omega^2(a_1+a_2\omega^2+a_3\omega)$ 的全部特征向量与 P 的属于 $\omega(\omega^2)$ 的全部特征向量一致.

13. 提示：设 $\lambda_0\neq 0$ 是 AB 的一个特征值，则存在 $\alpha\neq 0$，使得 $(AB)\alpha=\lambda_0\alpha$. 两边左乘 B，得 $(BA)(B\alpha)=\lambda_0(B\alpha)$.

习　题　5.6

1. 习题 5.5 的第 1 题中.

(1) A 可对角化. 令

$$P=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix},$$

则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{1,1,10\}$；

(2) A 不可以对角化；

(3) A 可对角化. 令

$$P=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\0&-1&2\end{pmatrix},$$

则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{2,2,11\}$；

(4) A 不可以对角化；

(5) A 可对角化. 令

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix},$$

则 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{0,1,-1\}$.

习题 5.5 的第 2 题中,

(1) 复数域上的矩阵 A 可对角化. 令

$$P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i\}$;

实数域上的矩阵 A 不可以对角化;

(2) 复数域上的矩阵 A 可对角化. 令

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1-2i & 1+2i \\ -1 & 1+i & -1-i \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

则 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{1, i, -i\}$.

2. 提示:求出 A 的全部特征值,然后用推论 6 判断,A 可对角化.

3. (1)

$$A^m = \begin{pmatrix} 2^{m+1}-3^m & 2(3^m-2^m) \\ 2^m-3^m & 2(3^m-2^{m-1}) \end{pmatrix};$$

(2)

$$A^m = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^m+(-1)^m 2 & 2^{m+1}-(-1)^m 2 \\ 2^m-(-1)^m & 2^{m+1}+(-1)^m \end{pmatrix}.$$

4. 提示:设 α,β 分别是 A 的属于 λ_1,λ_2 的特征向量,且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 假如 $\alpha+\beta$ 是 A 的特征向量,则有 $\lambda_3 \in K$,使得 $A(\alpha+\beta) = \lambda_3(\alpha+\beta)$. 从此式得 $\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = \lambda_3\alpha + \lambda_3\beta$. 利用推论 4,去推出矛盾.

5. 提示:据已知条件得,A 可对角化. 设

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

利用第 4 题的结论和已知条件,去证 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

6. 提示:设 n 级幂零矩阵 A 的秩为 $r(r \neq 0)$. 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间的维数等于 $n-r$. 注意幂零矩阵的特征值都是 0. 利用定理 5 去证 A 不可对角化.

7. 提示:当 $r = 0$ 时,$A = 0$;当 $r = n$ 时,$A = I$,在这两种情形,结论显然成立. 下设 $0 < r < n$. 习题 5.5 的第 5 题已证 A 的特征值为 1 或 0. 分别去求齐次线性方程组 $(I-A)X = 0$, $AX = 0$ 的解空间的维数. 注意利用习题 4.5 的第 5 题的结论.

8. 提示:利用第 7 题的结论,考虑幂等矩阵的相似标准形,并且利用相似矩阵的性质.

9. 提示:如果 $A = \pm I$,则 A 显然可对角化,且它的相似标准形是 A 自身. 下设 $A \neq \pm I$,于是 $I \mp A \neq 0$. 利用习题 5.5 的第 6 题的结论知,A 的特征值是 1 或 -1. 分别去求 $(I-A)X = 0$, $(-I-A)X = 0$ 的解空间的维数. 注意利用习题 4.5 的第 4 题的结论. A 的相似标准形是 $\mathrm{diag}\{I_r, \quad I_{n-r}\}$,其中 $r = \mathrm{rank}(I+A)$

10. 提示:A 的全部特征值是 a_{11}(n 重). 用反证法,推出 $A = a_{11}I$,矛盾.

*11. 提示:设 A 的属于特征值 λ_1 的特征子空间 W 的维数为 r. 在 W 中取一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$,把它扩充成 K^n 的一个基:$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_m$,其中 $r+m=n$. 令 $P =$

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_m)$. 则 P 是可逆矩阵. 先去计算 $P^{-1}AP$. 然后计算 $P^{-1}AP$ 的特征多项式(它等于 A 的特征多项式).

习 题 5.7

1. (1) $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$;

(2) $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$;

(3) $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

(4) $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}$.

2. 提示:实对称矩阵一定可对角化,考虑 A、B 的相似标准形.

3. 提示:由已知条件得,有正交矩阵 T,使得 $T^{-1}AT=D$,其中 D 是对角矩阵. 去计算 A'.

4. 提示:$A'A$ 是 n 级实对称矩阵,因此有 n 级正交矩阵 T,使得 $T^{-1}(A'A)T=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A'A$ 的全部特征值. 上式可写成
$$(AT)'(AT)=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}.$$
由此式去证 $\lambda_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$.

5. 提示:类似于定理 3 的证明方法.

6. 提示:利用定理 3 的结论,注意幂零矩阵的特征值都是 0.

7. (1) 提示:解法一:先求 J 的特征多项式,特征值和特征向量,然后判断可否对角化.
解法二:J 是实对称矩阵,因此 J 可对角化. 直接观察可求出 J 的特征值为 $n,0$,并且易求出它们的特征子空间的维数,以及特征向量.

(2) 提示:A 是实对称矩阵,因此 A 可对角化. 利用第(1)小题的结论,以及习题5.5第

11 题(3) 小题的结论,可得出 $a+bn$, a 都是 A 的特征值. A 的属于 a 的全部特征向量是齐次线性方程组 $(aI-(aI+bJ))X=0$(即 $JX=0$) 的解空间中的全部非零向量. 因此 A 的属于 a 的特征子空间的维数为 $n-\text{rank}(J)=n-1$. 从而 A 的属于 $a+bn$ 的特征子空间的维数为 1. 可逆矩阵取第(1)小题中的 P, 则 $P^{-1}AP=\text{diag}\{a+bn,a,\cdots,a\}$.

应用与实验课题:色盲遗传模型

1. 提示:把书上公式(3)写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} b_t \\ c_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{t-1} \\ c_{t-1} \end{pmatrix}.$$

把此式右端的 2 级矩阵记作 B. 则求 b_n, c_n 归结为求 B^{n-1}. 为此求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}BP$ 为对角矩阵:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

从而

$$B^{n-1}=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-1}P^{-1}$$

因此

$$b_n=\frac{1}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{n-2}]b_1+\frac{1}{3}[2+(-\frac{1}{2})^{n-2}]c_1,$$

$$c_n=\frac{1}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}]b_1+\frac{1}{3}[2+(-\frac{1}{2})^{n-1}]c_1.$$

2. $b_7=\frac{43}{640}\approx 0.067$, $c_7=\frac{17}{256}\approx 0.066$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{3}b_1+\frac{2}{3}c_1$.
4. 提示:n 很大时,b_n 与 c_n 相差很小,而男色盲者比例等于 b_n,女色盲者比例小于 c_n,因此男色盲者的比例大于女色盲者的比例.

第 6 章　二次型·矩阵的合同

习　题　6.1

1. (1) 令

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$.

注:所作的正交替换不唯一,以下同.

(2) 令

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix},$$

则 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$.

*2. 令

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix},$$

则在新的直解坐标系中,二次曲面的方程为

$$6x^{*2}+6y^{*2}-2z^{*2}=1.$$

由此看出,这是单叶双曲面.

3. (1) 令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3,\\x_2=\qquad\ \ y_2-y_3,\\x_3=\qquad\qquad\ \ y_3,\end{cases}$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

注:所作的非退化线性替换及标准形不唯一,以下同.

(2) 令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3,\\x_2=\qquad\ \ y_2+y_3,\\x_3=\qquad\qquad\ \ y_3,\end{cases}$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2$.

(3) 令 $\begin{cases}x_1=z_1-z_2-z_3,\\x_2=z_1+z_2-z_3,\\x_3=\qquad\qquad\ \ z_3,\end{cases}$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2-z_3^2$.

(4) 令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\x_2=y_1+y_2,\\x_3=y_3-y_4,\\x_4=y_3+y_4,\end{cases}$

则 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2y_1^2-2y_2^2-2y_3^2+2y_4^2$.

4. 提示:对于二次型 $a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2$,作非退化线性替换变成 $a_2y_1^2+a_3y_2^2+a_1y_3^2$.

5. 提示:必要性是显然的.充分性的证明,去计算 $\varepsilon_i'A\varepsilon_i$,$(\varepsilon_i+\varepsilon_j)'A(\varepsilon_i+\varepsilon_j)$,然后利用已知条件,就可证出 A 是斜对称矩阵.

6. 提示:利用第 5 题的充分性.

7. 提示:利用 n 级对称矩阵合同于对角矩阵.

8. (1) 令
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + \dfrac{2}{3}y_3, \\ x_2 = \qquad y_2 + \dfrac{2}{3}y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3, \end{cases}$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-3y_2^2+\dfrac{7}{3}y_3^2$.

(2) 令
$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 + \dfrac{1}{2}y_2 - y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3, \end{cases}$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-\dfrac{1}{4}y_2^2-y_3^2$.

9. 提示:对斜对称矩阵的级数作第二数学归纳法.类似于本节定理 2 的证法.

10. 提示:利用第 9 题的结论.

*11. 提示:有正交矩阵 T,使行 $T'AT=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,于是
$$\begin{aligned} \alpha'A\alpha &= \alpha'(T\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}T')\alpha \\ &= (T'\alpha)'\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}(T'\alpha) \\ &= \lambda_1b_1^2+\lambda_2b_2^2+\cdots+\lambda_nb_n^2 \end{aligned}$$

其中 $T'\alpha=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$.

*12. 提示:利用第 11 题结论.

*13. 提示:因为 A 实对称,所以有正交矩阵 T_1,使得
$$T_1^{-1}AT_1=\mathrm{diag}\{\lambda_1I_{r_1},\lambda_2I_{r_2},\cdots,\lambda_mI_{r_m}\},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 A 的全部不同的特征值.由已知条件 $AB=BA$,可得出
$$(T_1^{-1}AT)(T_1^{-1}BT_1)=(T_1^{-1}BT_1)(T_1^{-1}AT_1),$$

从而可推出
$$T_1^{-1}BT_1=\mathrm{diag}\{B_1,B_2,\cdots,B_m\},$$

其中每个 B_i 是实对称矩阵.

*14. 提示:取 α 为 A 的属于 λ_i 的特征向量.

习 题 6.2

1. (1) 令 $y_1=z_1,y_2=z_2,y_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}z_3$,则得 $z_1^2+z_2^2-z_3^2$;

(2) 已经是规范形:$y_1^2-y_2^2$;

(3) 已经是规范形：$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$；

(4) 令 $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1, y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_3, y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_4, y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_2$，则得 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2$.

2. 有 10 个合同类，每一类的合同规范形分别为

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3. $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

4. 提示：考虑 $X'AX$ 的规范形，由已知条件可得，正惯性指数 p 满足 $0 < p < n$.

5. 提示：考虑 $X'AX$ 的规范形，由于 $|A| < 0$，因此 $X'AX$ 的秩为 n，且负惯性指数为奇数.

6. 提示：充分性，用规范形. 必要性，设 n 元实二次型

$$X'AX = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n),$$

情形 1 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性相关；

情形 2 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性无关，此时不妨设 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix} \neq 0$.

7. 提示：先把 $X'AX$ 化成标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2, d_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,r$. 然作再作非退化线性替换：

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}}z_i, i = 1,2,\cdots,r,$$

$$y_j = z_j, j = r+1,\cdots,n.$$

*8. 提示：类似于惯性定理的证明方法.

习 题 6.3

1. 提示：对任意 $\alpha \in \mathbf{R}^n$ 且 $\alpha \neq 0$，去证 $\alpha'(A+B)\alpha > 0$.

2. 提示：利用实对称矩阵 A 是正定的 $\Longleftrightarrow A \simeq I$.

3. 提示：利用 $AA^* = |A|I$，对任意 $\alpha \in \mathbf{R}^n$ 且 $\alpha \neq 0$，去计算 $\alpha' A^* \alpha$.

4. 提示：去证当 $t > S_r(A)$ 时，$tI + A$ 的特征值全大于零.

5. 提示：因为 A 是 n 级实对称矩阵，所以有正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值.

6. (1) 正定； (2) 不是正定的； (3) 正定.

7. (1) $-\frac{4}{5} < t < 0$； (2) $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

8. 提示：n 级实对称矩阵 A 是正定的

$\Longleftrightarrow$ 存在正交矩阵 T，使得 $A = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}T$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零.

9. 提示：从第 8 题的证明过程可看出.

10. 提示：因为 A 正定，所以有实可逆矩阵 C_1，使得 $C_1'AC_1 = I$. 因为 $C_1'BC_1$ 是实对称矩阵，所以有正交矩阵 T，使得 $T'(C_1'BC_1)T$ 为对角矩阵. 取 $C = C_1T$，即得结论.

11. 提示：由于 $AB = BA$，因此 AB 是对称矩阵. 然后利用习题6.1的第13题结论，去证 AB 合同于一个对角矩阵，其主对角元全大于零.

12. 提示：充分性是显然的. 必要性，由于 A 正定，因此 $A \simeq I$. 从而有实可逆矩阵 C，使得 $A = C'IC = C'C$. 利用习题 4.3 的第 10 题结论去计算

$$A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ i_1,i_2,\cdots,i_k \end{pmatrix} = C'C\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ i_1,i_2,\cdots,i_k \end{pmatrix}.$$

13. 提示：对任意 $\alpha \in \mathbf{R}^n$，且 $\alpha \neq 0$，去证 $\alpha'(A+B)\alpha > 0$.

14. 提示：先证 J 半正定，然后用第 13 题结论.

15. 提示：充分性，用规范形易证，必要性，也是用规范形，且用反证法.

16. 提示：利用第 15 题结论.

17. 提示：利用第 16 题结论.

18. 提示：A 负定 $\Longleftrightarrow$ $-A$ 正定.

19. 提示：必要性证明类似于定理8的必要性证法. 充分性的证明利用第 5 章 §5 的命题 2，去证 A 的特征值全非负.

应用与实验课题：正(负)定矩阵在极值问题中的应用

1. 稳定点有(2,2)，(0,0)，$F(x,y)$ 在(2,2)处达到极大值 8，(0,0) 是鞍点.

2. 提示：该厂收入函数为 $R(Q_1,Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 4Q_1 + 8Q_2$. 于是利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q_1,Q_2) &= R(Q_1,Q_2) - C(Q_1,Q_2) \\ &= 4Q_1 + 8Q_2 - Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 3Q_2^2 - 2. \end{aligned}$$

函数 $L(Q_1,Q_2)$ 的稳定点为(1,1). $L(Q_1,Q_2)$ 在(1,1)处达到最大值 4，因此该厂应安排生产 $Q_1 = 1$，$Q_2 = 1$，可以使利润达到最大值 4.（注：譬如，该厂生产的两种产品的价格分别为 $P_1 = 4$(万元/吨)，$P_2 = 8$(万元/吨)，则应安排生产 $Q_1 = 1$(吨)，$Q_2 = 1$(吨)，可以使利润达到最大值 4 万元.）

8. 提示：n 级实对称矩阵 A 是正定的
$\Longleftrightarrow$ 存在正交矩阵 T，使得 $A = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}T$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零.

9. 提示：从第 8 题的证明过程可看出.

10. 提示：因为 A 正定，所以有实可逆矩阵 C_1，使得 $C_1'AC_1 = I$. 因为 $C_1'BC_1$ 是实对称矩阵，所以有正交矩阵 T，使得 $T'(C'_1BC_1)T$ 为对角矩阵. 取 $C = C_1T$，即得结论.

11. 提示：由于 $AB = BA$，因此 AB 是对称矩阵. 然后利用习题6.1的第13题结论，去证 AB 合同于一个对角矩阵，其主对角元全大于零.

12. 提示：充分性是显然的. 必要性，由于 A 正定，因此 $A \simeq I$. 从而有实可逆矩阵 C，使得 $A = C'IC = C'C$. 利用习题 4.3 的第 10 题结论去计算

$$A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ i_1,i_2,\cdots,i_k \end{pmatrix} = C'C\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ i_1,i_2,\cdots,i_k \end{pmatrix}.$$

13. 提示：对任意 $\alpha \in \mathbf{R}^n$，且 $\alpha \neq 0$，去证 $\alpha'(A+B)\alpha > 0$.

14. 提示：先证 J 半正定，然后用第 13 题结论.

15. 提示：充分性，用规范形易证，必要性，也是用规范形，且用反证法.

16. 提示：利用第 15 题结论.

17. 提示：利用第 16 题结论.

18. 提示：A 负定 $\Longleftrightarrow$ $-A$ 正定.

19. 提示：必要性证明类似于定理8的必要性证法. 充分性的证明利用第 5 章 §5 的命题 2，去证 A 的特征值全非负.

应用与实验课题：正(负)定矩阵在极值问题中的应用

1. 稳定点有(2,2)，(0,0)，$F(x,y)$ 在(2,2) 处达到极大值 8，(0,0) 是鞍点.

2. 提示：该厂收入函数为 $R(Q_1,Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 4Q_1 + 8Q_2$. 于是利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q_1,Q_2) &= R(Q_1,Q_2) - C(Q_1,Q_2) \\ &= 4Q_1 + 8Q_2 - Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 3Q_2^2 - 2. \end{aligned}$$

函数 $L(Q_1,Q_2)$ 的稳定点为(1,1). $L(Q_1,Q_2)$ 在(1,1) 处达到最大值 4，因此该厂应安排生产 $Q_1 = 1$，$Q_2 = 1$，可以使利润达到最大值 4.（注：譬如，该厂生产的两种产品的价格分别为 $P_1 = 4$(万元／吨)，$P_2 = 8$(万元／吨)，则应安排生产 $Q_1 = 1$(吨)，$Q_2 = 1$(吨)，可以使利润达到最大值 4 万元.）

8. 提示：n 级实对称矩阵 A 是正定的

$\Longleftrightarrow$ 存在正交矩阵 T，使得 $A = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}T$，且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零.

9. 提示：从第 8 题的证明过程可看出.

10. 提示：因为 A 正定，所以有实可逆矩阵 C_1，使得 $C_1'AC_1 = I$. 因为 $C_1'BC_1$ 是实对称矩阵，所以有正交矩阵 T，使得 $T'(C_1'BC_1)T$ 为对角矩阵. 取 $C = C_1T$，即得结论.

11. 提示：由于 $AB = BA$，因此 AB 是对称矩阵. 然后利用习题6.1的第13题结论，去证 AB 合同于一个对角矩阵，其主对角元全大于零.

12. 提示：充分性是显然的. 必要性，由于 A 正定，因此 $A \simeq I$. 从而有实可逆矩阵 C，使得 $A = C'IC = C'C$. 利用习题 4.3 的第 10 题结论去计算

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ i_1, i_2, \cdots, i_k \end{pmatrix} = C'C\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ i_1, i_2, \cdots, i_k \end{pmatrix}.$$

13. 提示：对任意 $\alpha \in \mathbf{R}^n$，且 $\alpha \neq 0$，去证 $\alpha'(A+B)\alpha > 0$.

14. 提示：先证 J 半正定，然后用第 13 题结论.

15. 提示：充分性，用规范形易证，必要性，也是用规范形，且用反证法.

16. 提示：利用第 15 题结论.

17. 提示：利用第 16 题结论.

18. 提示：A 负定 $\Longleftrightarrow$ $-A$ 正定.

19. 提示：必要性证明类似于定理8的必要性证法. 充分性的证明利用第 5 章 §5 的命题 2，去证 A 的特征值全非负.

应用与实验课题：正(负)定矩阵在极值问题中的应用

1. 稳定点有(2,2)，(0,0)，$F(x,y)$ 在(2,2)处达到极大值 8，(0,0) 是鞍点.

2. 提示：该厂收入函数为 $R(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 4Q_1 + 8Q_2$. 于是利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q_1, Q_2) &= R(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2) \\ &= 4Q_1 + 8Q_2 - Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 3Q_2^2 - 2. \end{aligned}$$

函数 $L(Q_1, Q_2)$ 的稳定点为(1,1). $L(Q_1, Q_2)$ 在(1,1)处达到最大值 4，因此该厂应安排生产 $Q_1 = 1, Q_2 = 1$，可以使利润达到最大值 4.（注：譬如，该厂生产的两种产品的价格分别为 $P_1 = 4$(万元/吨)，$P_2 = 8$(万元/吨)，则应安排生产 $Q_1 = 1$(吨)，$Q_2 = 1$(吨)，可以使利润达到最大值 4 万元.）

8. 提示：n 级实对称矩阵 A 是正定的

$\Longleftrightarrow$ 存在正交矩阵 T，使得 $A = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}T$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零.

9. 提示：从第 8 题的证明过程可看出.

10. 提示：因为 A 正定，所以有实可逆矩阵 C_1，使得 $C_1'AC_1 = I$. 因为 $C_1'BC_1$ 是实对称矩阵，所以有正交矩阵 T，使得 $T'(C_1'BC_1)T$ 为对角矩阵. 取 $C = C_1T$，即得结论.

11. 提示：由于 $AB = BA$，因此 AB 是对称矩阵. 然后利用习题6.1的第13题结论，去证 AB 合同于一个对角矩阵，其主对角元全大于零.

12. 提示：充分性是显然的. 必要性，由于 A 正定，因此 $A \simeq I$. 从而有实可逆矩阵 C，使得 $A = C'IC = C'C$. 利用习题 4.3 的第 10 题结论去计算

$$A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ i_1,i_2,\cdots,i_k \end{pmatrix} = C'C\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ i_1,i_2,\cdots,i_k \end{pmatrix}.$$

13. 提示：对任意 $\alpha \in \mathbf{R}^n$，且 $\alpha \neq 0$，去证 $\alpha'(A+B)\alpha > 0$.

14. 提示：先证 J 半正定，然后用第 13 题结论.

15. 提示：充分性，用规范形易证，必要性，也是用规范形，且用反证法.

16. 提示：利用第 15 题结论.

17. 提示：利用第 16 题结论.

18. 提示：A 负定 $\Longleftrightarrow$ $-A$ 正定.

19. 提示：必要性证明类似于定理8的必要性证法. 充分性的证明利用第 5 章 §5 的命题 2，去证 A 的特征值全非负.

应用与实验课题：正(负)定矩阵在极值问题中的应用

1. 稳定点有(2,2)，(0,0)，$F(x,y)$ 在(2,2) 处达到极大值 8，(0,0) 是鞍点.

2. 提示：该厂收入函数为 $R(Q_1,Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 4Q_1 + 8Q_2$. 于是利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q_1,Q_2) &= R(Q_1,Q_2) - C(Q_1,Q_2) \\ &= 4Q_1 + 8Q_2 - Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 3Q_2^2 - 2. \end{aligned}$$

函数 $L(Q_1,Q_2)$ 的稳定点为(1,1). $L(Q_1,Q_2)$ 在(1,1) 处达到最大值 4，因此该厂应安排生产 $Q_1 = 1$，$Q_2 = 1$，可以使利润达到最大值 4.（注：譬如，该厂生产的两种产品的价格分别为 $P_1 = 4$(万元／吨)，$P_2 = 8$(万元／吨)，则应安排生产 $Q_1 = 1$(吨)，$Q_2 = 1$(吨)，可以使利润达到最大值 4 万元.）

8. 提示：n 级实对称矩阵 A 是正定的

$\Longleftrightarrow$ 存在正交矩阵 T，使得 $A = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} T$，且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零.

9. 提示：从第 8 题的证明过程可看出.

10. 提示：因为 A 正定，所以有实可逆矩阵 C_1，使得 $C_1'AC_1 = I$. 因为 $C_1'BC_1$ 是实对称矩阵，所以有正交矩阵 T，使得 $T'(C_1'BC_1)T$ 为对角矩阵. 取 $C = C_1T$，即得结论.

11. 提示：由于 $AB = BA$，因此 AB 是对称矩阵. 然后利用习题6.1的第13题结论，去证 AB 合同于一个对角矩阵，其主对角元全大于零.

12. 提示：充分性是显然的. 必要性，由于 A 正定，因此 $A \simeq I$. 从而有实可逆矩阵 C，使得 $A = C'IC = C'C$. 利用习题 4.3 的第 10 题结论去计算

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ i_1, i_2, \cdots, i_k \end{pmatrix} = C'C\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ i_1, i_2, \cdots, i_k \end{pmatrix}.$$

13. 提示：对任意 $\alpha \in \mathbf{R}^n$，且 $\alpha \neq 0$，去证 $\alpha'(A + B)\alpha > 0$.

14. 提示：先证 J 半正定，然后用第 13 题结论.

15. 提示：充分性，用规范形易证，必要性，也是用规范形，且用反证法.

16. 提示：利用第 15 题结论.

17. 提示：利用第 16 题结论.

18. 提示：A 负定 $\Longleftrightarrow$ $-A$ 正定.

19. 提示：必要性证明类似于定理8的必要性证法. 充分性的证明利用第 5 章 §5 的命题 2，去证 A 的特征值全非负.

应用与实验课题：正(负)定矩阵在极值问题中的应用

1. 稳定点有(2,2)，(0,0)，$F(x,y)$ 在(2,2) 处达到极大值 8，(0,0) 是鞍点.

2. 提示：该厂收入函数为 $R(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 4Q_1 + 8Q_2$. 于是利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q_1, Q_2) &= R(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2) \\ &= 4Q_1 + 8Q_2 - Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 3Q_2^2 - 2. \end{aligned}$$

函数 $L(Q_1, Q_2)$ 的稳定点为(1,1). $L(Q_1, Q_2)$ 在(1,1) 处达到最大值 4，因此该厂应安排生产 $Q_1 = 1$，$Q_2 = 1$，可以使利润达到最大值 4.（注：譬如，该厂生产的两种产品的价格分别为 $P_1 = 4$(万元／吨)，$P_2 = 8$(万元／吨)，则应安排生产 $Q_1 = 1$(吨)，$Q_2 = 1$(吨)，可以使利润达到最大值 4 万元.）