第八节 · 假设检验

司继春

上海对外经贸大学统计与信息学院

在上一节中，我们讨论了对于未知总体参数 θ 的参数估计问题，包括点估计和区间估计。很多时候，我们不仅仅需要回答总体参数 θ 是多少的问题，或者 θ 在什么区间范围以内的问题，还要回答「是不是」的问题，比如 $\theta = \theta_0$ 是不是成立？例如，在上一节中，我们发现在中国城镇住户调查的数据中，男性收入平均比女性年收入多 8222 元，那么我们是不是可以推断总体男性收入的确比女性高呢？还是仅仅因为抽样的巧合导致了我们计算的男性收入比女性收入高？我们可以使用**假设检验**（**Hypothesis testing**）的方法回答此类问题。

1 假设检验

为了讨论假设检验的问题，我们首先介绍「假设（hypothesis）」的概念。在假设检验中，假设指的是关于总体参数 θ 的一个命题。比如，对于不同总体，我们可能有如下假设：

1. 山东成年男性的平均身高为 175cm（$\theta = \theta_0$）
2. 某生产线次品率控制在 0.1% 范围内（$\theta \leq \theta_0$）
3. 北方人平均身高高于南方人（$\theta_1 \geq \theta_2$）

以上的例子都是关于未知总体参数的一些猜想。由于总体参数是未知的，我们只能观察到样本，因而我们不能确切的知道以上命题究竟是否成立，而只能使用样本对以上命题进行推断。

需要注意的是，这里的假设（hypothesis）与数学命题中的假设（assumption）是不同的。假设检验中的假设是我们要验证或者推翻的某个命题，而数学命题中的假设则是结论的前提条件。

假设检验中有两个互补的假设：**原假设**（**null hypothesis**）和**备择假设**（**alternative hypothesis**），分别用 H_0 和 H_1 来表示。如果参数的范围为 Θ，即总体参数 $\theta \in \Theta$，而原假设为 $\theta \in \Theta_0$，那么备择假设即为原假设的补集，即 $\theta \in \Theta_0^c$。比如，如果 $\Theta = \mathbb{R}$，若原假设是 $\theta = \theta_0$，那么备择假设就是 $\theta \neq \theta_0$；若原假设是 $\theta \geq \theta_0$，那么备择假设就是 $\theta < \theta_0$。注意原假设一般包含等号。

假设检验的过程就是使用数据作为「证据」试图推翻原假设的过程，这个过程与法官判案的过程类似。在法律中，有所谓的「无罪推定原则（presumption

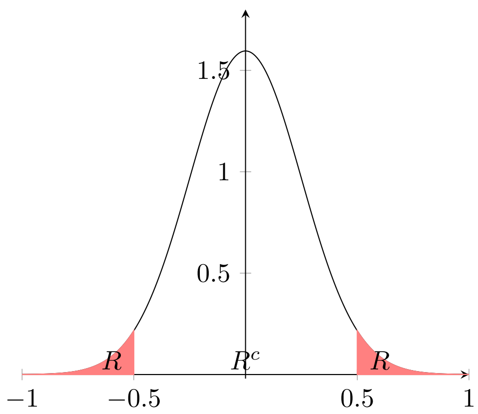


图 1: 拒绝域与第 I 类错误的概率

of innocence)」，即对于犯罪嫌疑人，必须先假设其无罪，原告方有义务提出证据证明其犯罪，而不得强迫嫌疑人自证其罪。使用以上术语，即原假设（H_0）为被告无罪，备择假设（H_1）为被告有罪，假设检验的目的就是使用证据（样本数据）试图推翻原假设（无罪）。如果现有证据可以推翻原假设，那么我们称为拒绝原假设（rejecting H_0），即可以认为原假设为假；而如果现有证据不能推翻原假设，即没有充足的证据证明原假设为假，那么我们称不能拒绝原假设（not rejecting H_0）。注意「接受原假设（accepting H_0）」的说法与「不能拒绝原假设」的说法有细微差别，如果不能拒绝原假设，可能是由于我们的证据不够充分，因而「不能拒绝原假设」的说法更加准确。基于上述原因，我们一般会把想要推翻的结论放在原假设上。

由于统计方法总会存在误差，因而基于以上两类假设的推断也会存在犯错的可能性。在假设检验中，有两种错误可能会发生：

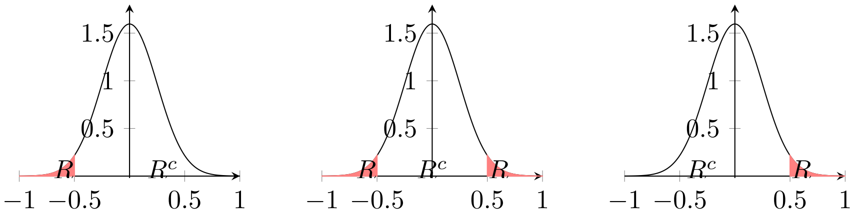
1. 第 I 类错误：原假设为真，但是拒绝原假设，即「弃真错误」；

2. 第 II 类错误：备择假设为真，但是接受原假设，即「取伪错误」。

比如，如果一个被告本来无罪，但是错误地判其有罪，那么就犯了第 I 类错误；而如果一个被告的确犯罪，但是却判其无罪，那么就犯了第 II 类错误。

假设检验一般通过设定一个检验统计量 $T(x)$，以及一个拒绝域 R，当 $T(x) \in R$ 时拒绝原假设。如果记 $H_0 : \theta \in \Theta_0$，而 $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$，那么第 I 类错误，即原假设为真但是拒绝原假设的概率为：$P_{\theta \in \Theta_0}(T(x) \in R)$。

例 1. 如果样本 $x_i \sim N(\mu_0, 1)$ $i.i.d, i = 1, ..., N$，μ 为未知总体参数。如果原假设为 $H_0 : \mu_0 = 0$，备择假设为 $H_1 : \mu_0 \neq 0$，那么 $\Theta_0 = \{0\}$。令检验统计量 $T(x) = \bar{x}$，如果在原假设条件下，即假设 $\mu_0 = 0$，那么 $\bar{x} \sim N\left(0, \frac{1}{N}\right)$，即如果原假设成立，那么样本均值应该分布在 0 附近。而如果我们看到了样本均值距离 0 比较远，那么说明原假设有可能是不成立的。如图 (1) 所示，如果取拒绝



$H_0 : \mu \geq \mu_0$ 左侧检验 $H_0 : \mu = \mu_0$ 双侧检验 $H_0 : \mu \leq \mu_0$ 右侧检验

图 2: 单侧检验与双侧检验

域为 $R = (-\infty, -0.5) \cup (0.5, \infty)$，那么：

$$\begin{aligned}
P_{\theta_0=0}\left(\bar{x} \in R\right) &= P_{\theta_0=0}\left(|\bar{x}| > 0.5\right) \\
&= P_{\theta_0=0}\left(\left|\frac{\bar{x}}{\sqrt{\frac{1}{N}}}\right| > \frac{0.5}{\sqrt{\frac{1}{N}}}\right) \\
&= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{\frac{1}{N}}}\right)\right)
\end{aligned}$$

如果令 $N = 16$，那么 $P_{\theta_0=0}\left(\bar{x} \in R\right) = 2\left(1 - \Phi\left(2\right)\right) \approx 4.56\%$。注意以上概率是我们在原假设的假设上进行计算的，这意味着，如果原假设成立，那么得到均值落在拒绝域，即 $\bar{x} \in R = (-\infty, -0.5) \cup (0.5, \infty)$ 的概率为 4.56%。这样，如果我们采取「如果均值落入拒绝域就拒绝原假设」这一策略，那么在原假设的条件下，我们犯错的概率就是 4.56%，即犯第 I 类错误的概率为 4.56%。

此外，如图 (2) 所示，根据原假设的不同，检验还可以分为单侧检验和双侧检验。在上例中我们讨论的是双侧检验，并计算了给定拒绝域的情况下犯第 I 类错误的概率。然而如果原假设是不等于号，我们通常不能精确计算犯第 I 类错误的概率。此时，值得关注的是犯第 I 类错误的概率的上界，即 $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\left(T\left(x\right) \in R\right)$。

例 2. 如果样本 $x_i \sim N\left(\mu_0, 1\right)$ $i.i.d, i = 1, ..., N$，μ 为未知总体参数。如果原假设为 $H_0 : \mu_0 \leq 0$，那么当 $\bar{x}$ 足够大时，可以拒绝原假设。在原假设的条件下，

当 $\mu_0 = \mu < 0$ 时，如果取拒绝域为 $R = (0.5, \infty)$，那么：

$$\begin{aligned} P_\mu(\bar{x} \in R) &= P_\mu(\bar{x} > 0.5) \\ &= P_\mu\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{N}}} > \frac{0.5-\mu}{\sqrt{\frac{1}{N}}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0.5-\mu}{\sqrt{\frac{1}{N}}}\right) \end{aligned}$$

注意以上概率随着 μ 的增加而增加，由于 $\mu \in \Theta_0 = (-\infty, 0]$，因而其上界：

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(x) \in R) = 1 - \Phi\left(\frac{0.5-0}{\sqrt{\frac{1}{N}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{\frac{1}{N}}}\right)$$

当 $N = 16$ 时，上式为 $1 - \Phi(2) \approx 2.28\%$，即在原假设 $H_0 : \mu_0 \leq 0$ 的假设下，错误拒绝原假设的概率上界为 2.28%，或者等价的，犯第 I 类错误的概率上界为 2.28%。

在假设检验中，我们希望控制犯第 I 类错误的概率进行推断，即给定一个 α，找到一个拒绝域 R_α，使得 $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(x) \in R_\alpha) \leq \alpha$。如此，我们便保证了使用拒绝域 R_α 进行假设检验，犯第 I 类错误的概率不超过 α。我们称 α 为**显著性水平**（**level of significance**），一般取 $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$，而 R_α 为一个区间，区间的断点成为临界值（critical value）。更小的 α 代表我们对犯第 I 类错误更加不能容忍，因而我们会更大的概率接受原假设，即拒绝域也会越小。

此外，我们还可以定义 p 值的概念。p 值指的是，给定检验统计量 $T(x) = t$，在原假设的条件下，能够取到 t 或者比 t 更加极端的值的概率。或者等价的，p 值可以被定义为能够拒绝原假设的最小的显著性水平，即给定 $T(x) = t$：

$$p = \inf\{\alpha \in (0,1) : t \in R_\alpha\}$$

由于检验统计量 $T(x)$ 为随机变量，因而 $p(x) = \inf\{\alpha \in (0,1) : T(x) \in R_\alpha\}$ 也是一个随机变量。当 $p \leq 0.01, 0.05, 0.1$ 时，可以拒绝原假设。如图 (3) 所示，绿色区域面积即 p 值。

综上，一般的假设检验的步骤可以总结如下：

1. 确定原假设 H_0 和备择假设 H_1；
2. 找到一个检验统计量 $T(x)$（通常为基准统计量）；
3. 确定检验统计量 $T(x)$ 在原假设 H_0 下的分布；
4. 设定显著性水平 α，并根据 α 确定拒绝域 R_α，若 $T(x) \in R_\alpha$ 则在 α 的显著性水平下拒绝原假设；或者根据 $T(x)$ 计算 p 值，若 $p < \alpha$ 则拒绝原

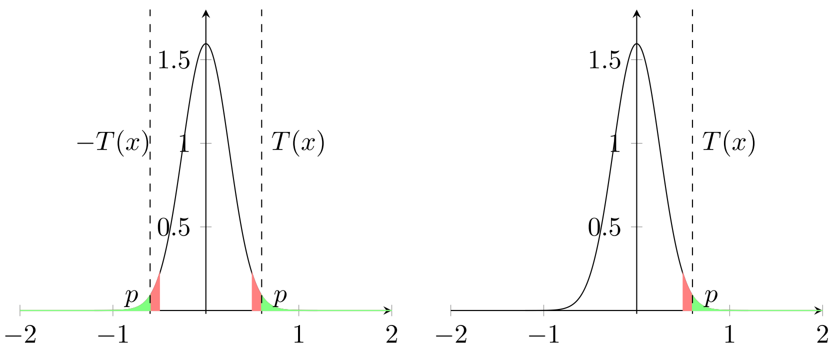


图 3: p 值的定义

假设。

例 3. 如果样本 $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $i.i.d, i = 1, ..., N$，为了检验 $H_0 : \mu = \mu_0$，在 H_0 的假定下，$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{N}\right)$，因而可以构建统计量：

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{N}}} \sim t_{N-1}$$

由于是双侧检验，因而临界值为 $t_{\alpha/2}$，拒绝域为 $R_\alpha = (-\infty, -t_{\alpha/2}) \cup (t_{\alpha/2}, \infty)$，当 $|t| > t_{\alpha/2}$ 时拒绝原假设，即认为 $\mu \neq \mu_0$，否则不能拒绝原假设。

例 4. 如果样本 $x_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $i.i.d, i = 1, ..., N_1$，$x_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $i.i.d, i = 1, ..., N_2$，且两个样本独立。为了检验 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，在 H_0 的假定下，

$$\frac{\frac{(N_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2} / (N_1 - 1)}{\frac{(N_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2} / (N_2 - 1)} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(N_1 - 1, N_2 - 1)$$

因而其拒绝域为 $R_\alpha = (0, F_{\alpha/2}) \cup (F_{1-\alpha/2}, \infty)$

例 5. 根据 2009 年中国城镇住户调查，在 37480 户家庭中，已知家庭年收入均值为 54157.63 元，标准差为 38533.96 元，请问在 1%、5% 的显著性水平下，是否可以认为家庭年收入均值为 53000 元？在这里，原假设为 $H_0 : \mu_0 = 53000$，在原假设条件下，我们有：

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{N}}} = \frac{\sqrt{37480}(\bar{x} - 53000)}{38533.96} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$$

计算可得 $z = 5.82$，查表得到在 1% 的显著性水平下，拒绝域为 $(-\infty, -2.58) \cup (2, 58, \infty)$，显然 z 在拒绝域范围内，因而可以拒绝原假设。在 1% 的显著性水平下拒绝原假设，因而在 5% 的显著性水平下必然也拒绝原假设。

例 6. 根据 2013 年中国家庭金融调查，样本 7711 户家庭中，有 6% 的家庭有信用卡，请问在 5% 的显著性水平下，我们是否可以认为我国家庭持有信用卡的比例超过了 5%？为了解决这一问题，原假设为：$H_0 : p \leq 5\%$，在原假设的条件下，我们有：

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}} = \frac{\hat{p} - 5\%}{\sqrt{\frac{5\%(1-5\%)}{7711}}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$$

带入计算可得检验统计量 $z = 4.03$。由于是右侧检验，因而拒绝域为 $\left(\Phi^{-1}(0.95), \infty\right)$，即 $(1.65, \infty)$，$4.93 > 1.65$，因而拒绝原假设，可以认为我国家庭持有信用卡的比例超过了 5%。

例 7. 在 2009 年中国城镇住户调查中，共有 23440 位 20-50 岁的男性，以及 21184 位 20-50 岁的女性。已知男性年平均收入为 28367.96 元，标准差为 21811.88 元；女性年平均收入为 20145.77 元，标准差为 16541.08 元。如果假设男女收入独立，请问在 5% 的显著性水平下，是否可以认为男女收入差异没有超过 10000 元？这里，原假设为 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 10000$，在原假设的条件下，我们有：

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$$

由于 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 28367.96 - 20145.77 = 8222.19$，$\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2} = \frac{21811.88^2}{23440} + \frac{16541.08^2}{21184} = 33212.60$，$\mu_1 - \mu_2 = 10000$，因而 $z = -9.76$。由于是左侧检验，因而拒绝域为 $(-\infty, -1.65)$，可以拒绝原假设，即可以认为男女收入差异没有超过 10000 元。

2 评价检验的方法

根据以上的假设检验步骤，我们知道假设检验可以控制犯第 I 类错误的概率，然而对于假设检验而言，还有犯第 II 类错误的可能性，即当我们无法拒绝原假设的时候，备择假设可能是成立的。为了研究第 II 类错误的概率，我们引入假设检验的势（power）的概念。

定义 1. 对于一个假设检验及其拒绝域 R，检验的**势函数**（**power function**）即给定 θ 拒绝原假设的概率，即 $\beta(\theta) = P_\theta(T(x) \in R)$。

注意在以上定义中我们并没有限定 $\theta \in \Theta_0$ 或者 $\theta \in \Theta_0^c$，因而理想的情况下，当 $\theta \in \Theta_0$ 时，$\beta(\theta)$ 应该接近于 0，而当 $\theta \in \Theta_0^c$ 时，$\beta(\theta)$ 应该接近于 1。当 $\theta \in \Theta_0^c$，即备择假设为真时，没有拒绝原假设的概率，即 $1 - \beta(\theta)$，即犯第 II 类错误的概率。

例 8. 若样本 $x_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)\ i.i.d, i = 1, ..., N$，且 σ^2 已知，设原假设为 $H_0 : \mu \leq \mu_0$，备择假设为 $H_1 : \mu > \mu_0$，那么可以构建检验统计量为：

$$T(x) = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}} \sim N(0, 1)$$

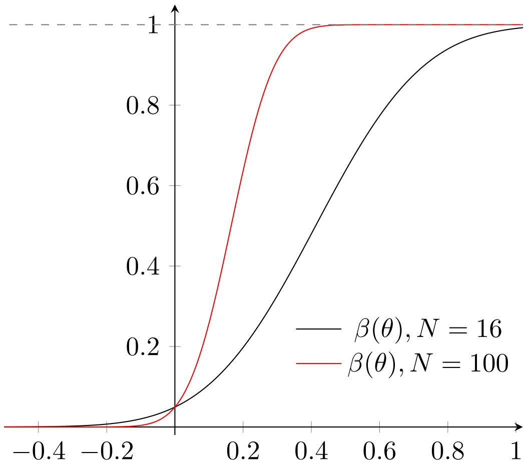


图 4: 势函数

在原假设的条件下，若给定 $\alpha = 0.05$，那么 $R_{0.05} = (z_{0.95}, \infty)$。因而，给定 μ，势函数为:

$$\begin{aligned}\beta(\theta) &= P_\mu\left(T(x) \in R_{0.05}\right)\\ &= P_\mu\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}} > z_{0.95}\right)\\ &= P_\mu\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}} > z_{0.95} + \frac{\mu_0-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}}\right)\\ &= 1-\Phi\left(z_{0.95} + \frac{\mu_0-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}}\right)\end{aligned}$$

图 (4) 给出了当 $\mu_0 = 0$，$N = 16$，$\sigma^2 = 1$ 时的势函数。注意当 $\mu \to -\infty$ 时，$\beta(\mu) \to 0$；当 $\mu = \mu_0$ 时，$\beta(\mu) = 0.05$；而当 $\mu \to \infty$ 时，$\beta(\mu) \to 1$，且 $\beta(\theta)$ 是 μ 的单调递增函数。这意味着，在当原假设为真时，即 $\mu \leq \mu_0$ 时，拒绝原假设的概率总是小于等于 $\alpha = 0.05$ 的，这与我们假设检验控制第 I 类错误的概率是一致的。而当 $\mu > \mu_0$ 时，随着 μ 的增大，犯第 II 类错误的概率也随之降低。此外，注意到，犯第 II 类错误的概率是随着样本量 N 的增大而减小的。

观察图 (4) 我们会发现，不管样本量 N 再大，当真值 $\theta > \theta_0$，但是差异很小时，第 II 类错误概率 $1-\beta(\theta)$ 仍然会无线趋向于 $1-\alpha$。因而当备择假设为真，但是真值与原假设非常接近时，仍然需要样本量非常大才能够正确的拒绝原假设。

介于此种情况，我们可以引入无差异区域（indifference region），即虽然备择假设为真，但是 θ 与 θ_0 的差异足够的小，我们认为在这个区域里面错误接

受原假设也是可以接受的。例如，如果我们设计实验研究 wifi 会不会致癌，即看照射组合非照射组的实验对象患癌症的概率是否显著大于 0，即 $H_0:\mu\le 0$。假设 wifi 的确会致癌，但是致癌的概率充分的接近于 0，根据图 (4) 我们会发现，如果我们想要正确的拒绝原假设，需要非常大的样本量才能保证以一个比较大的概率 β 拒绝原假设。然而如果我们认为，致癌概率在一定的范围内，比如 $[0,\Delta)$ 内，是可以接受的，那么我们可以据此设计样本量，保证以一个确定的概率拒绝原假设。

如果我们希望，当 $\mu=\Delta$ 时，至少以 β 的概率拒绝原假设，那么

$$\beta = 1-\Phi\left(z_\alpha+\frac{0-\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}}\right)$$

从而

$$N=\left[\frac{\sigma}{\Delta}\left(z_\alpha-z_{1-\beta}\right)\right]^2$$

例 9. 在上例中，记实验组（wifi 照射）得癌症的概率为 p_1，对照组（无 wifi 照射）得癌症的概率为 p_2，我们关注的关键变量为 $\mu=p_1-p_2$，原假设为 $H_0:\mu\le 0$。如果拒绝原假设，即可以认为 wifi 照射会致癌。如果假设两组的样本量相同，那么：

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\mu}\right)=\mathrm{Var}\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)=\mathrm{Var}\left(\hat{p}_1\right)+\mathrm{Var}\left(\hat{p}_2\right)=\frac{p_1\left(1-p_1\right)+p_2\left(1-p_2\right)}{N}$$

在原假设下，可以认为 $p_1=p_2$，那么 $\mathrm{Var}\left(\hat{\mu}\right)=\frac{2p_1(1-p_1)}{N}$。如果取 $\Delta=0.001,\beta=0.8$，记我们希望当 wifi 致癌的概率为千分之一时，我们希望以 80% 的概率拒绝原假设，取 $\alpha=0.05$，那么所需样本量为：

$$N=\left[\frac{2\sqrt{p_1\left(1-p_1\right)}}{\Delta}\left(1.65-0.15\right)\right]^2=4\left(\frac{1.65-0.15}{0.0001}\right)^2\left[p_1\left(1-p_1\right)\right]$$

如果自然条件下，癌症发病率为 0.2%，即当 $p_1=0.002$ 时，上述样本量大概需要 $N=17964$ 个。而反过来，如果样本量足够大，那么 μ 与 μ_0 的一些非常细微的差别也足以导致统计上的显著性，尽管很多时候这种细微的差别几乎没有现实意义。因而，即使数据中可以得到统计上显著的结果，特别是在样本量非常大的情况下，我们仍然要注意这些结果是不是有「经济显著性（economic significancy）」，即这些差别在现实中是不是足以引起重视。

3 构造假设检验的方法

在以上两节中我们介绍了假设检验的一般概念和思路。我们知道，如果在原假设 H_0 的条件下得到检验统计量及其抽样分布，我们就可以使用上节中给出的步骤进行假设检验。尽管上一节中我们讨论了单个样本、多个样本均值的

假设检验，然而很多时候我们可能希望对不止一个参数进行假设检验，或者对参数的函数进行假设检验。一般的，记我们的原假设为：

$$H_0 : C(\theta) = 0$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}^k$，$C(\theta) \in \mathbb{R}^r$，且 $C(\theta)$ 为 θ 的连续可微函数。那么一般的，我们可以通过如下两个方法构造假设检验。

3.1 Wald 检验

如果对于 θ 的估计，我们已经有 $\hat{\theta} \sim N(\theta, \Sigma)$，那么使用 Delta 方法：

$$C\left(\hat{\theta}\right) = C(\theta) + \ddot{C}\left(\hat{\theta} - \theta\right) + o\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right|\right)$$

其中 $\ddot{C} = \partial C(\theta) / \partial \theta$ 为 $r \times k$ 的矩阵，且假设 $\operatorname{rank}\left(\ddot{C}\right) = r$，那么在原假设的条件下，：

$$C\left(\hat{\theta}\right) = \ddot{C}\left(\hat{\theta} - \theta\right) + o_p(1) \sim N\left(0, \ddot{C}\Sigma\ddot{C}'\right)$$

进而我们可以构建检验统计量：

$$C'\left(\hat{\theta}\right)\left[\ddot{C}\Sigma\ddot{C}'\right]^{-1} C\left(\hat{\theta}\right) \sim \chi_r^2$$

因而可以使用以上检验统计量对原假设进行假设检验。

3.2 似然比检验

在原假设的条件下，如果可以使用极大似然估计对 θ 进行估计，那么我们可以在 H_0 的约束下对 θ 进行估计，即：

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \arg\max_{\theta} L(\theta|x) \\ s.t. C(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

与此同时，我们还可以估计无约束的极大似然估计：

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(\theta|x)$$

由于 $\tilde{\theta}$ 是在约束条件下得到的，而 $\hat{\theta}$ 是在无约束的条件下得到的，因而 $L\left(\hat{\theta}|x\right) \geq L\left(\tilde{\theta}|x\right)$。如果原假设成立，即 $C(\theta) = 0$，那么 $\tilde{\theta}$ 是和 $\hat{\theta}$ 应该充分接近，因而 $L\left(\hat{\theta}|x\right)$ 和 $L\left(\tilde{\theta}|x\right)$ 也应该充分接近；但是如果 $L\left(\hat{\theta}|x\right) > L\left(\tilde{\theta}|x\right)$ 成立，那么

我们可以认为 $C(\theta)=0$ 是不成立的。实际上，我们可以得到：

$$LR = 2\left[L\left(\hat{\theta}|x\right) - L\left(\tilde{\theta}|x\right)\right] \sim \chi_r^2$$

因而我们可以根据以上结论对 $C(\theta)=0$ 进行检验。

例 10. 如果 $x_i \sim P(\lambda)$，$i=1,...,N$，如果原假设为 $H_0:\lambda=1$，那么无约束时，$\hat{\lambda}=\bar{x}$，而有约束时，$\tilde{\lambda}=1$。其似然函数分别为：

$$\begin{aligned} L\left(\hat{\lambda}|x\right) &= \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln\left(\hat{\lambda}\right) - \ln(x_i!) - \hat{\lambda}\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln(\bar{x}) - \ln(x_i!) - \bar{x}\right] \\ L\left(\tilde{\lambda}|x\right) &= \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln\left(\tilde{\lambda}\right) - \ln(x_i!) - \tilde{\lambda}\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln(1) - \ln(x_i!) - 1\right] \end{aligned}$$

因而检验统计量为：

$$\begin{aligned} LR &= 2\left[\sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln(\bar{x}) - \ln(x_i!) - \bar{x}\right] - \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln(1) - \ln(x_i!) - 1\right]\right] \\ &= 2\left[\sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln(\bar{x}) - \bar{x} + 1\right]\right] \\ &= 2N\left[\ln(\bar{x})\,\bar{x} - \bar{x} + 1\right] \sim \chi_1^2 \end{aligned}$$

习题

1. （程序题）生成一系列正态分布 $x_i \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，给定不同的 $\mu \in [-2,2]$，在 $H_0:\mu=0$ 的条件下，对于固定的 μ，重复 1000 次假设检验的过程，并计算对于每一个 μ，在 $H_0:\mu=0$ 的条件下拒绝原假设的比率（power function）。

2. （程序题）对于比例的检验，在 $H_0:p=p_0$ 的原假设下，我们有如下两个渐进等价的方法：

   $$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

   以及：

   $$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

   分别模拟两种检验方法在小样本（$N=15$）和大样本（$N=50$）条件下的势函数，并进行比较。

3. （程序题）请使用对数似然比检验，在 $H_0:p=p_0$ 的原假设下，写出对样本比例的检验统计量，并使用数值模拟计算出其势函数，并于上题中的势

函数进行比较。

参考文献

[1] Casella, G., Berger, R.L., 2002. Statistical inference. Duxbury Pacific Grove, CA.

[2] Shao, J., 2007. Mathematical Statistics, 2nd ed. Springer, New York.