习题答案

司继春

上海对外经贸大学统计与信息学院

1 统计量

练习 1. 等式 $\mathbb{E}s=\sigma$ 是否成立？如果成立，请证明，如果不成立，请指出其大小关系。

解答. 由于 $\mathbb{E}s^2=\sigma^2$，而 $s=\sqrt{s^2}$，$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$，$\sqrt{}$ 为凹函数，根据 Jesen 不等式，$\mathbb{E}s=\mathbb{E}\sqrt{s^2}\leq\sqrt{\mathbb{E}s^2}=\sigma$。

练习 2. 证明 $F^{-1}(q)$ 是以下最小化问题的解：

$$\min_c \mathbb{E}\psi_q(X-c)$$

解答. 对上式求一阶条件得到：

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\partial\mathbb{E}\psi_q(X-c)}{\partial c}\\
&=\frac{\partial\int_{\mathbb{R}}\psi_q(x-c)\,dF(x)}{\partial c}\\
&=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\psi_q(x-c)}{\partial c}dF(x)\\
&=\int_c^{\infty}(-q)\,dF(x)+\int_{-\infty}^{c}(1-q)\,dF(x)\\
&=-q(1-F(c))+(1-q)F(c)\\
&=F(c)-q
\end{aligned}$$

解上式可得 $c=F^{-1}(q)$。

练习 3. 求以下分布的充分统计量：

1. 泊松分布

   解答. 样本的联合分布为：

$$f(x|\lambda)=\prod_{i=1}^{N}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\ln(\lambda)-\ln(x_i!)-\lambda\right]\right\}$$

令 $T(x)=\sum_{i=1}^{N}x_i$，那么：

$$f(x|\lambda)=\exp\left\{T(x)\ln(\lambda)-N\lambda-\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i!)\right\}$$

根据因子分解定理可得，$T(x)$ 为充分统计量。

或者，另外一种方法是，将泊松分布写为指数分布族的形式，即：

$$f(x_i|\lambda)=\frac{1}{x_i!}\exp\{\lambda x_i-\lambda\}$$

因而 $T(x)=\sum_{i=1}^{N}x_i$ 为充分统计量。

2. 指数分布

解答. 样本的联合分布为：

$$f(x|\lambda)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\beta}\exp\left\{-\frac{x-a}{\beta}\right\}=\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{x_i}{\beta}+\frac{a}{\beta}-\ln\beta\right]\right\}$$

因而 $T(x)=\sum_{i=1}^{N}x_i$ 为充分统计量。

3. 正态分布

解答. 正态分布的密度函数写成指数分布族的形式为：

$$\begin{aligned}
f\left(x_i|\mu,\sigma^2\right)&=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\ln\sigma-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{x_i^2-2\mu x_i+\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\ln\sigma\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}x_i^2+\frac{\mu}{\sigma^2}x_i-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\ln\sigma\right\}
\end{aligned}$$

因而 $T_1(x_i)=x_i^2$，$T_2(x_i)=x_i$，因而 $T(x)=\left[\sum_{i=1}^{N}x_i^2,\sum_{i=1}^{N}x_i\right]'$ 为正态分布的充分统计量。

2 参数估计

1. 计算例 (??) 中两个估计量的 MSE。

解答. 在上例中，

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

我们知道:

$$\frac{(N-1)\,s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-1)$$

因而 $\mathbb{E}\left(\frac{(N-1)s^2}{\sigma^2}\right) = N-1, \mathrm{Var}\left(\frac{(N-1)s^2}{\sigma^2}\right) = 2(N-1)$，即：$\mathbb{E}\left(s^2\right) = \sigma^2, \mathrm{Var}\left(s^2\right) = \frac{2\sigma^4}{N-1}$，因而 $\mathrm{Bias}\left(s^2\right) = 0$，因而

$$\mathrm{MSE}\left(s^2\right) = \left[\mathrm{Bias}\left(s^2\right)\right]^2 + \mathrm{Var}\left(s^2\right) = \frac{2\sigma^4}{N-1}$$

而由于 $\hat{\sigma}^2 = \frac{N-1}{N}s^2$，因而

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bias}\left(\hat{\sigma}^2\right) &= \mathbb{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) - \sigma^2 = \frac{N-1}{N}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{1}{N}\sigma^2 \\
\mathrm{Var}\left(\hat{\sigma}^2\right) &= \mathrm{Var}\left(\frac{N-1}{N}s^2\right) = \frac{(N-1)^2}{N^2}\mathrm{Var}\left(s^2\right) = \frac{2(N-1)\,\sigma^4}{N^2}
\end{aligned}$$

因而

$$\mathrm{MSE}(\hat{\sigma}) = [\mathrm{Bias}(\hat{\sigma})]^2 + \mathrm{Var}(\hat{\sigma}) = \frac{1}{N^2}\sigma^4 + \frac{2(N-1)\,\sigma^4}{N^2} = \frac{(2N-1)\,\sigma^4}{N^2}$$

因而如果以 MSE 为标准，$\hat{\sigma}^2$ 比 s^2 更优。

2. 求以下分布总体的矩估计，并验证其无偏性和一致性。

   (a) $x_i \sim Ber(p)$

   (b) $x_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

   解答. 首先，计算总体矩。即：

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x_i) = \mu \\ \mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mathrm{Var}(x_i) + [\mathbb{E}(x_i)]^2 = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

   其次，我们有样本矩：

$$\begin{cases} m_1 = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \\ m_2 = \overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{cases}$$

为了估计未知参数 μ, σ^2，我们令样本矩等于总体矩，即：

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} \end{cases}$$

联立以上方程组，得到估计：

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - \hat{\mu}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{cases}$$

首先验证两个估计的无偏性。首先，对于两个样本矩，我们有：

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(m_1\right) = \mathbb{E}\left(\bar{x}\right) = \mu \\ \mathbb{E}\left(m_2\right) = \mathbb{E}\left(\overline{x^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i^2\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

因而 $\mathbb{E}\left(\hat{\mu}\right) = \mu$，而根据 Jensen 不等式，

$$\mathbb{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \mathbb{E}\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) = \mu^2 + \sigma^2 - \mathbb{E}\left(\bar{x}^2\right) \leq \mu^2 + \sigma^2 - \left[\mathbb{E}\left(\bar{x}\right)\right]^2 = \sigma^2$$

因而 $\hat{\mu}$ 是 μ 的无偏估计，而 $\hat{\sigma}^2$ 不是 σ^2 的无偏估计。
而对于一致性，根据大数定律，我们有：

$$\begin{cases} m_1 = \bar{x} \xrightarrow{p} \mu \\ m_2 = \overline{x^2} = \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

因而 $\hat{\mu} = \bar{x} \xrightarrow{p} \mu$，而 $\hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \xrightarrow{p} \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$，即 $\hat{\mu}$ 是 μ 的一致估计，而 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的一致估计。

(c) $x_i \sim P\left(\lambda\right)$

3. 若 $x_i \sim U\left(a, b\right)$ $i.i.d$，求其矩估计，并验证其一致性。

解答. 首先，计算总体矩。即：

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(x_i\right) = \frac{a+b}{2} \\ \mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mathrm{Var}\left(x_i\right) + \left[\mathbb{E}\left(x_i\right)\right]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} \end{cases}$$

其次，我们有样本矩：

$$\begin{cases} m_1 = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i \\ m_2 = \overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i^2 \end{cases}$$

为了估计未知参数 a,b，我们令样本矩等于总体矩，即：

$$\begin{cases}\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\bar{x}\\ \frac{\left(\hat{b}-\hat{a}\right)^2}{12}+\frac{\left(\hat{a}+\hat{b}\right)^2}{4}=\overline{x^2}\end{cases}$$

联立以上方程组，得到估计：

$$\begin{cases}\hat{a}=\bar{x}-\sqrt{3}\sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\\ \hat{b}=\bar{x}+\sqrt{3}\sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\end{cases}$$

为了验证一致性，首先根据大数定律，有：

$$\begin{cases}m_1=\bar{x}\xrightarrow{p}\mathbb{E}\left(x_i\right)=\frac{a+b}{2}\\ m_2=\overline{x^2}\xrightarrow{p}\mathbb{E}\left(x_i^2\right)=\frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(a+b)^2}{4}\end{cases}$$

因而 $\hat{a}\xrightarrow{p}\frac{a+b}{2}-\sqrt{3}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a$，同理 $\hat{b}\xrightarrow{p}b$。

4. 求以下分布总体的极大似然估计，证明其一致性并计算估计量的极限分布。

 (a) $x_i\sim P\left(\lambda\right)$

 解答. 样本 $x=\left(x_1,...,x_N\right)'$ 的联合密度函数为：

$$f\left(x|\lambda\right)=\prod_{i=1}^{N}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\ln\left(\lambda\right)-\ln\left(x_i!\right)-\lambda\right]\right\}$$

 因而其对数似然函数为：

$$L\left(\lambda|x\right)=\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\ln\left(\lambda\right)-\ln\left(x_i!\right)-\lambda\right]$$

 最大化似然函数，其一阶条件为：

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i}{\lambda}-1\right)=0$$

 解得：

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

验证一致性，直接根据大数定律可得：

$$\hat{\lambda} = \bar{x} \xrightarrow{p} \mathbb{E}(x_i) = \lambda$$

而根据中心极限定理，有：

$$\sqrt{N}\left(\hat{\lambda} - \lambda\right) = \sqrt{N}(\bar{x} - \lambda) \overset{a}{\sim} N(0, \operatorname{Var}(x_i))$$

而由于 $\operatorname{Var}(x_i) = \lambda$，因而

$$\sqrt{N}\left(\hat{\lambda} - \lambda\right) \overset{a}{\sim} N(0, \lambda)$$

即 $\hat{\lambda} \overset{a}{\sim} N\left(\lambda, \frac{\lambda}{N}\right)$。

(b) $x_i \sim N(\mu, 1)$

(c) $x_i \sim N\left(0, \sigma^2\right)$